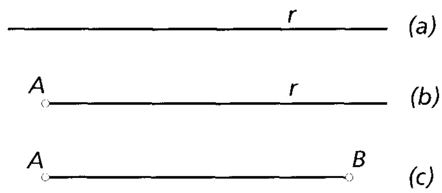
TRAZADOS GEOMÉTRICOS

1. PERPENDICULARIDAD

Se denomina *recta* a una sucesión ilimitada de puntos en la misma dirección; una *semirrecta* es una recta limitada por uno de sus extremos; y se llama *segmento* a la parte de recta limitada por dos puntos



Recibe el nombre de *lugar geométrico* el conjunto de puntos del plano o del espacio que tienen una misma propiedad.

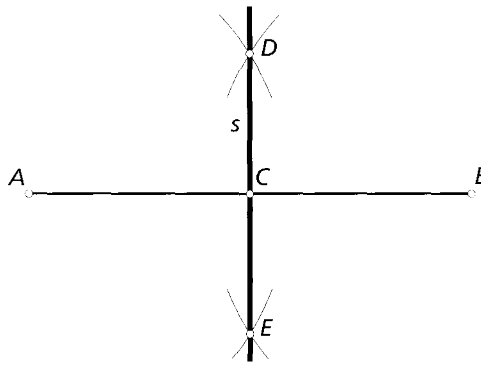
Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando un ángulo de 90º.

Mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. La mediatriz es un lugar geométrico, ya que cualquier punto de ella equidista de los extremos del segmento.

1.1. TRAZAR LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Dado el segmento AB:

1. Con centro en *A* y radio arbitrario se trazan dos arcos de circunferencia.
2. Con centro en el otro extremo *B* y con el mismo radio anterior, se trazan otros dos arcos, que se cortan con los anteriores en los puntos *D* y *E*.
3. La recta s que une los puntos *D* y *E* es la perpendicular al segmento por el punto medio C.

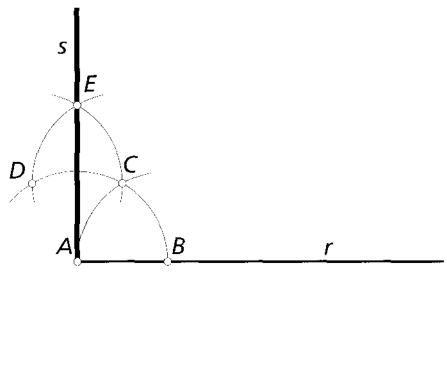


1.2. TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA SEMIRRECTA POR SU EXTREMO

Dada la semirrecta *r* y el extremo *A*:

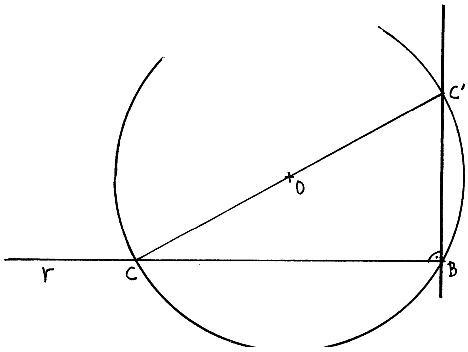
MÉTODO 1

1. Con centro en el punto *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a la recta *r* en el punto *B*.
2. Con centro en el punto *B* y con el mismo radio anterior se traza un segundo arco que corta al anterior en el punto *C*.
3. Con centro en el punto *C* y el mismo radio se traza un tercer arco que corta al primero en el punto *D*.
4. Con centro en el punto *D* y el mismo radio se traza otro arco que corta al tercero en el punto *E*.
5. La recta s que une el punto *E* con el A es la perpendicular a la recta *r*.



MÉTODO 2

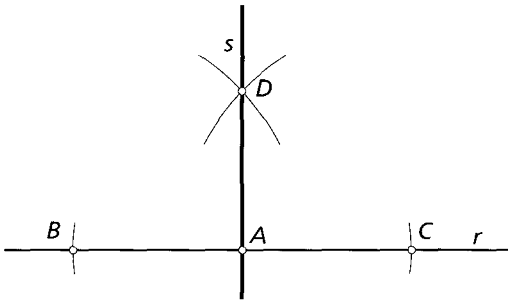
1. Se toma un punto exterior como centro para trazar una circunferencia que pase por el extremo B (radio OB) y que cortará en C a la semirrecta.
2. Se traza un diámetro que pase por C por O y que determinará el punto D sobre la circunferencia.
3. La recta que queda determinada por el punto D y el punto B es la perpendicular que buscamos



1.3. TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA POR UN PUNTO DE LA MISMA

Dada la recta *r* y el punto *A*:

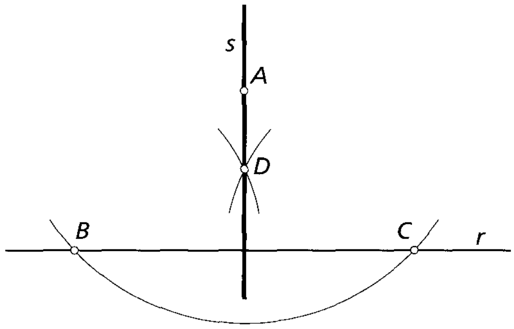
1. Con centro en *A* y radio arbitrario se trazan dos arcos que cortan a la recta *r* en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* y radio arbitrario se trazan sendos arcos que se cortan en el punto *D*.
3. La recta *s* que une los puntos *D* y *A* es la perpendicular buscada.



1.4. TRAZAR LA PERPENDICULAR A UNA RECTA POR UN PUNTO EXTERIOR A ELLA

Dada la recta *r* y el punto *A*:

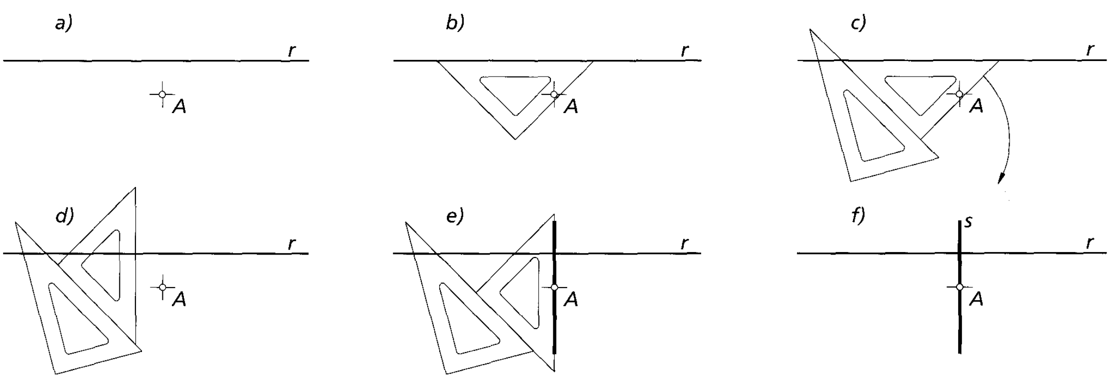
1. Con centro en *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a la recta en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* y radio arbitrario se trazan sendos arcos que se cortan en el punto *D*.
3. La recta s que une los puntos *D* y *A* es la perpendicular buscada.



1.5. TRAZADO DE PERPENDICULARES CON ESCUADRA Y CARTABÓN

Dada la recta *r* y el punto *A*:

1. Se hace coincidir la hipotenusa de la escuadra con recta *r*.
2. Sin mover la escuadra, se apoya el cartabón en uno de los catetos de la escuadra.
3. Sujetando el cartabón, se hace girar la escuadra hasta apoyar el otro cateto en el cartabón y hacer pasar la hipotenusa por el punto *A*.
4. Por el punto *A* se traza la recta *s*.



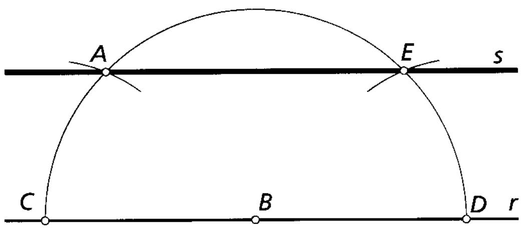
2. PARALELISMO

Se dice que dos rectas coplanarias, es decir, que pertenecen al mismo plano, son paralelas cuando su punto de intersección se encuentra en el infinito.

2.1 TRAZAR POR UN PUNTO LA PARALELA A UNA RECTA

Dada la recta *r* y el punto *A*:

1. Se elige un punto *B* cualquiera de la recta *r* y se traza la semicircunferencia de centro *B* y radio *BA*, que corta a la recta *r* en *C* y *D*.
2. Con centro en *D* y radio *CA* se traza un arco que corta a la semicircunferencia en el punto *E*.
3. La recta s que une los puntos *A* y *E* es la paralela buscada.

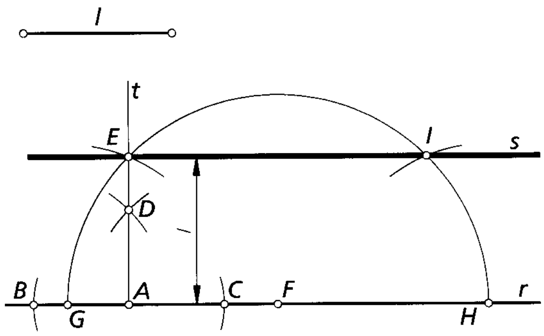


2.2. TRAZAR LA PARALELA A UNA RECTA A UNA DISTANCIA DADA

Dada la recta *r* y la longitud *l*:

1. Se elige un punto cualquiera *A* de la recta *r* y se traza la perpendicular *t* a la recta *r* (ver apartado 1.3).
2. Sobre la recta *t* se traslada el segmento *AE = 1*.
3. Por el punto *E* se traza la recta s paralela a la recta *r* (ver apartado 2.1).

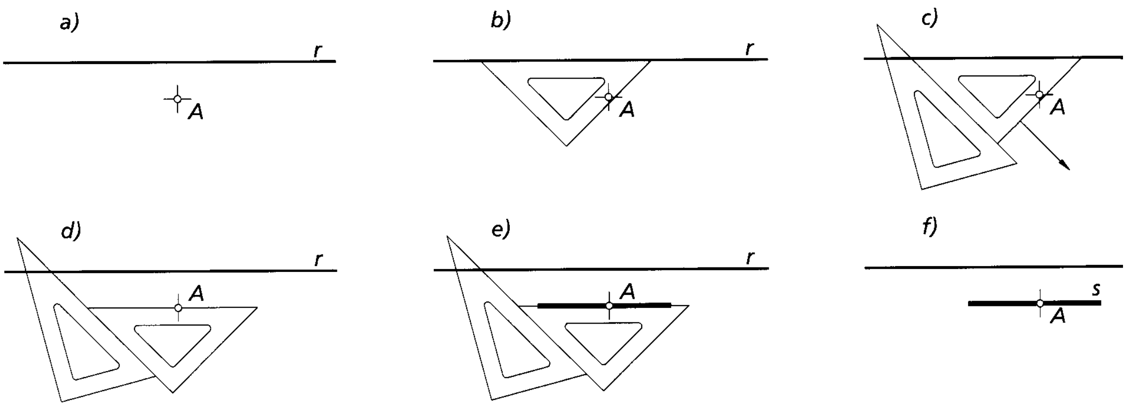
Hay otra solución en el semiplano inferior.



2.3. TRAZADO DE PARALELAS CON ESCUADRA Y CARTABÓN

Dada la recta *r* y el punto *A*:

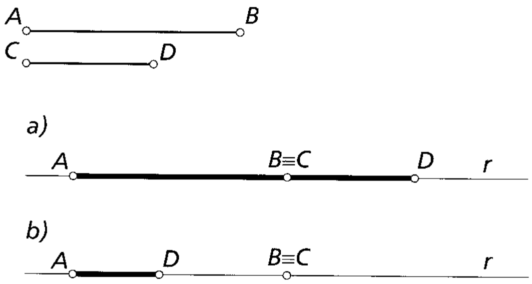
1. Se hace coincidir la hipotenusa de la escuadra con la recta *r*.
2. Sin mover la escuadra, se apoya el cartabón en uno de los catetos de la escuadra.
3. Sujetando el cartabón, se desliza la escuadra sobre el cartabón hasta que su hipotenusa pase por *A*.
4. Por el punto *A* se traza la recta *s*.



3. SEGMENTOS

3.1. DADOS DOS SEGMENTOS, HALLAR LA SUMA Y LA DIFERENCIA DE AMBOS

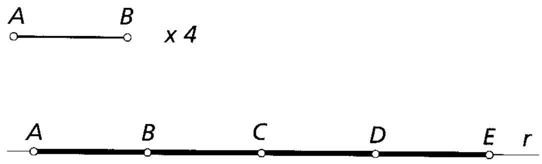
Dados los segmentos *AB* y *CD*:



1. Sobre una recta *r* se lleva el segmento *AB*.
2. *Suma (Fig. a)*: A partir del punto *B* y sobre la recta *r* se lleva el segmento *CD* en el mismo sentido que *AB*. La longitud *AD* es la suma de ambos.
3. *Resta (fig. b)*: *A* partir del punto *B* se lleva el segmento *CD* en sentido contrario que *AB*. La longitud *AD* es la diferencia de ambos.

3.2. DADO UN SEGMENTO, HALLAR SU PRODUCTO POR UN NÚMERO

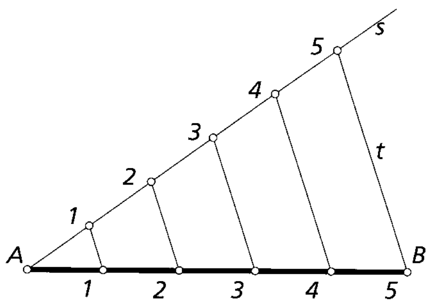
Dado el segmento *AB*:



1. Sobre una recta *r* se lleva el segmento *AB* tantas veces como indique el número por el que se quiere multiplicar; en este caso, cuatro.
2. El segmento total *AE* es la solución.

3.3 DIVIDIR UN SEGMENTO EN UN NÚMERO DE PARTES IGUALES

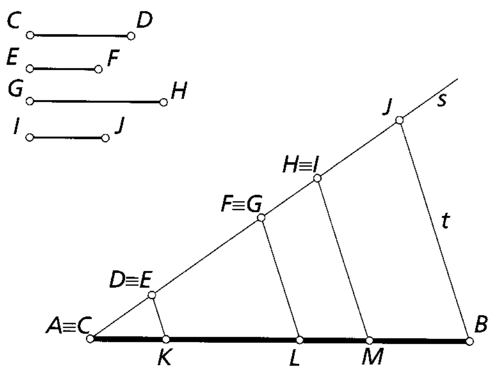
Dado el segmento *AB*:



1. Por uno de los extremos *A* se traza una recta cualquiera s.
2. Sobre la recta *s* se llevan tantos segmentos iguales, de longitud arbitraria, como número de partes se quiera dividir el segmento.
3. Se traza la recta *t* que une el último punto con el otro extremo *B* del segmento, y por los puntos *1, 2, 3*, etc., de la recta *s* se trazan paralelas a *t.*

3.4. DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES PROPORCIONALES A LAS DIMENSIONES DE OTROS SEGMENTOS

Dado el segmento *AB* y los segmentos *CD, EF, GH* e *IJ*:



1. Por uno de los extremos *A* del segmento *AB* se traza una recta cualquiera s.
2. Sobre la recta s se van llevando, uno a continuación del otro, los segmentos *CD, EF, GH* e *IJ.*
3. Se une el último punto *J* con el otro extremo *B* mediante la recta t, trazando a continuación paralelas a t por los puntos *E, G* e *I*.

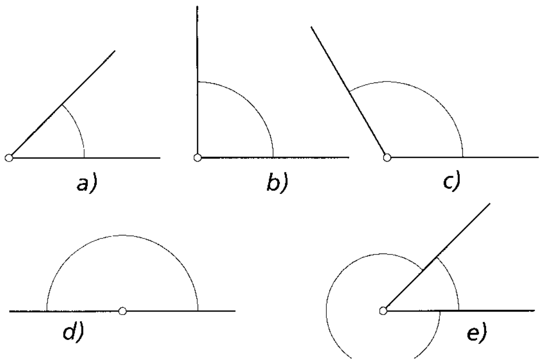
Este apartado lo ampliaremos en el tema 3, en el apartado de Proporcionalidad.

ANGULOS. ARCO CAPAZ

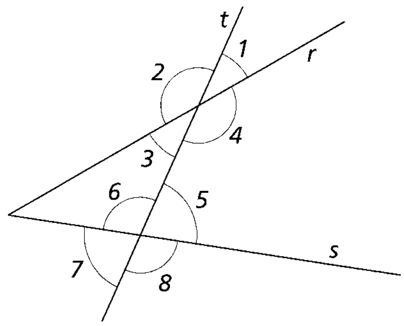
1. ÁNGULOS

1.1 DEFINICIONES

Se denomina *ángulo* a cada una de las dos regiones del plano que determinan dos semirrectas con el origen común. Las semirrectas se llaman *lados* y el punto común *vértice.*

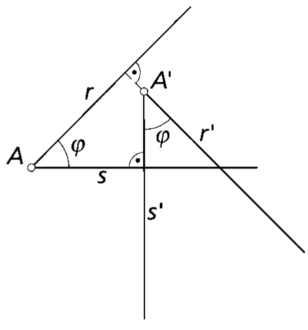


Ángulo agudo es el que mide menos de 90° *(fig. a)*.
Ángulo recto es el que mide 90° *(fig. b).*
Ángulo obtuso es el que mide más de 90° *(fig. c)*.
Ángulo llano es el que mide 180° (*fig. d).*
Ángulo cóncavo es el mayor de los dos ángulos que determinan los dos lados del mismo *(fig. e)*.
Ángulo convexo es el menor de los dos ángulos que determinan sus lados *(fig. e)*.



Sean dos rectas concurrentes *r* y *s*, y una secante *t* :

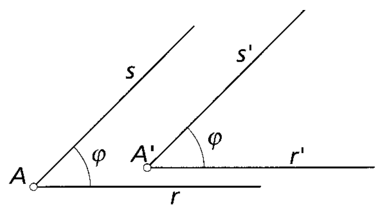
Ángulos externos: 1, 2, 7 y 8.
Ángulos internos: 3, 4, 5 y 6.
Ángulos adyacentes externos: 1-2 y 7-8.
Ángulos adyacentes internos: 3-4 y 5-6.
Ángulos alternos externos: 1-7 y 2-8.
Ángulos alternos internos: 3-5 y 4-6.



Se llama *bisectriz* de un ángulo a la recta que divide a este en dos ángulos iguales, o lo que es lo mismo, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Ángulos suplementarios: son los que suman 180°.
Ángulos complementarios: son los que suman 90°.

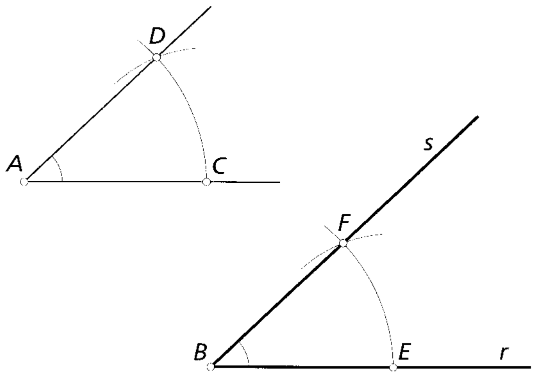
Propiedades



- Dos ángulos agudos cuyos lados son paralelos son iguales.
- Los ángulos agudos cuyos lados son perpendiculares son iguales.

1.2 CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO IGUAL A OTRO

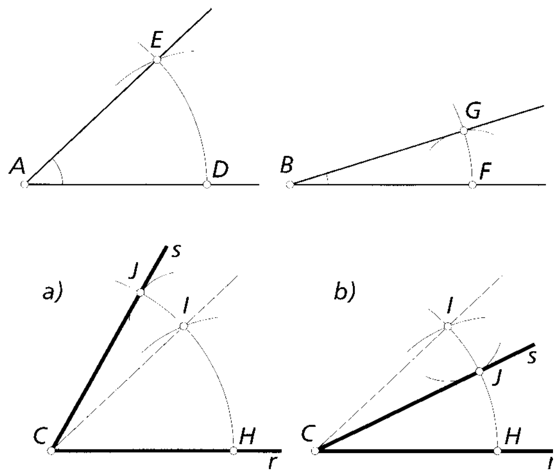
Dado el ángulo *A*:



1. Sobre una recta *r* se toma un punto *B* arbitrario.
2. Con centro en *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a los lados del ángulo en *C* y *D*.
3. Con el mismo radio anterior y centro en *B* se traza un arco que corta a la recta *r* en el punto *E*.
4. Con centro en *E* y radio *CD* se describe un arco que corta al anterior en *F*.
5. La recta *s* que une los puntos *B* y *F* forma con re¡ ángulo buscado.

1.3. SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

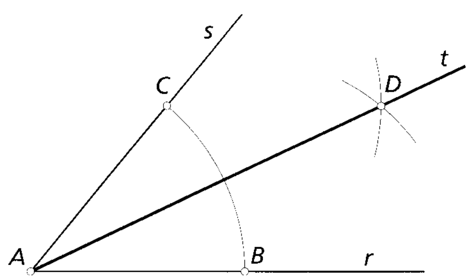
Dados los ángulos *Á* y *B*:



1. Sobre una recta *r* se toma un punto *C* arbitrario.
2. Con radio arbitrario y centros en *A* y *B* se trazan dos arcos que cortan a los lados de los ángulos en los puntos *D, E, F* y *G*.
3. Con el mismo radio anterior y centro en *C* se traza un arco base que corta a la recta *r* en el punto *H.*
4. Con centro en *H* y radio *DE* se describe un arco que corta al arco base en *I*.
5. Suma *(fig. a)*: con centro en *I* y radio *FG* se describe otro arco en el mismo sentido que el anterior hasta cortar al arco base en el punto *J*.
6. Resta *(fig. b)*: con centro en *I* y radio *FG* se describe otro arco en sentido contrario al anterior hasta cortar al arco base en el punto *J*.
7. La recta s que une los puntos *C* y *J* forma con re¡ ángulo buscado.

1.4 TRAZADO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

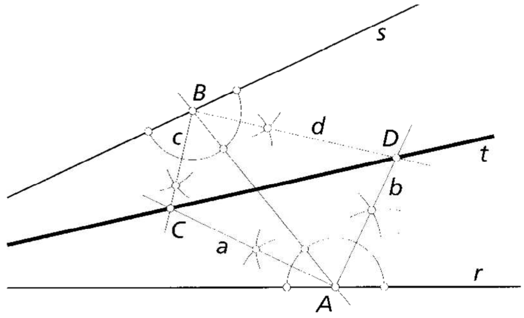
Dado un ángulo *A* formado por *r* y *s*:



1. Con centro en el vértice *A* y radio arbitrario se traza un arco que corta a *r* y *s* en los puntos *B* y *C*.
2. Con centros en *B* y *C* se trazan dos arcos arbitrarios de igual radio que se cortan en *D*.

3. La recta *t* que une los puntos *A* y *D* es la bisectriz del ángulo.

1.5. DADAS DOS RECTAS QUE SE CORTAN FUERA DE LOS LÍMITES DEL DIBUJO, TRAZAR LA BISECTRIZ DEL ÁNGULO QUE FORMAN

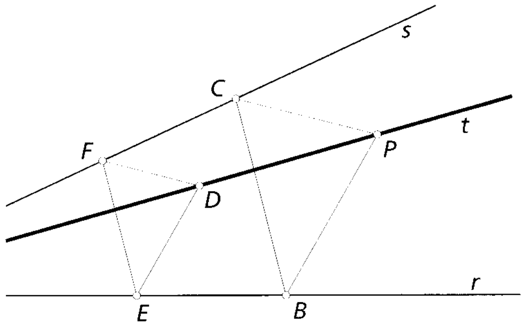


Dadas las rectas *r* y *s*:

1. Se traza una recta arbitraria que corta a *r* y *s* en los puntos *A* y *B*.
2. Se trazan las bisectrices *a, b, c* y *d* de los ángulos que forman las rectas *r* y *s* con la recta *AB*.
3. Las bisectrices anteriores se cortan en los puntos *C* y *D* que, al unirlos, definen *t*, bisectriz del ángulo que forman *r* y *s*.

1.6. DADAS DOS RECTAS QUE SE CORTAN FUERA DE LOS LÍMITES DEL DIBUJO Y UN PUNTO P, TRAZAR LA RECTA CONCURRENTE CON ELLAS Y QUE PASE POR EL PUNTO DADO

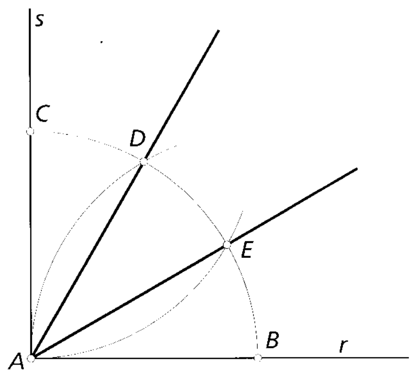
Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *P* :



1. Se traza una recta cualquiera que corta a *r* y *s* en los puntos *B* y *C*.
2. Se unen los puntos *B* y *C* con *P*, definiendo el triángulo *PBC*.
3. Se traza otra recta arbitraria paralela a la recta *BC*, que corta a *r* y *s* en *E* y *F*.
4. Por el punto *E* se traza una paralela a *PB* y por el punto *F* se traza una paralela a *PC;* ambas paralelas se cortan en *D*.
5. La recta *t* que une *P* y *D* es la solución.

1.7. DIVISIÓN DE UN ÁNGULO RECTO EN TRES PARTES IGUALES

Dadas las rectas *r* y *s* que forman 90º:



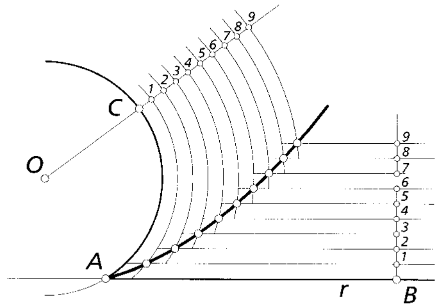
1. Con centro en el vértice *A* y radio arbitrario se traza un arco de circunferencia que corta a la recta *r* en *B* y a la recta *s* en *C*.
2. Con centros en *B* y *C*, y el mismo radio, se trazan dos arcos que cortan al primero en *D* y en *E*.
3. Las rectas *AD* y *AE* dividen el ángulo recto en tres.

1.8. ÁNGULOS MIXTILÍNEOS Y CURVILÍNEOS. TRAZADO DE BISECTRICES

Un ángulo rectilíneo es el formado por dos líneas rectas. Un ángulo curvilíneo es el formado por dos líneas curvas; por ejemplo, dos arcos de circunferencia. Un ángulo mixtilíneo es el formado por una línea recta y una línea curva.

Bisectriz de un ángulo mixtilíneo

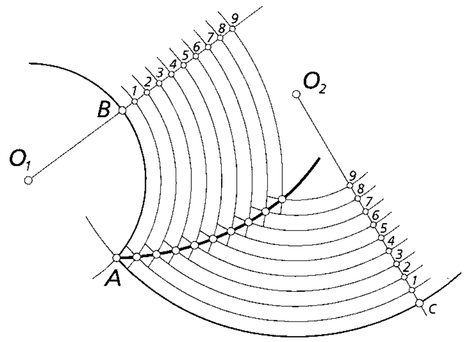
Sea la recta *r* y el arco de centro *O*:



1. Por un punto *B* de la recta se traza una perpendicular, llevando sobre ella divisiones iguale *1, 2, 3,* etc., y trazando paralelas a *r*.
2. Por un punto *C* del arco se traza el radio correspondiente, llevando sobre él divisiones igual(a las anteriores: *1, 2, 3,* etc., y trazando arcos concéntricos.
3. Los puntos de intersección de la paralela *1* con el arco *1*, de la paralela *2* con el arco *2*, de la paralela *3* con el arco *3*, etc., nos determinan la bisectriz del ángulo mixtilíneo.

Bisectriz de un ángulo curvilíneo

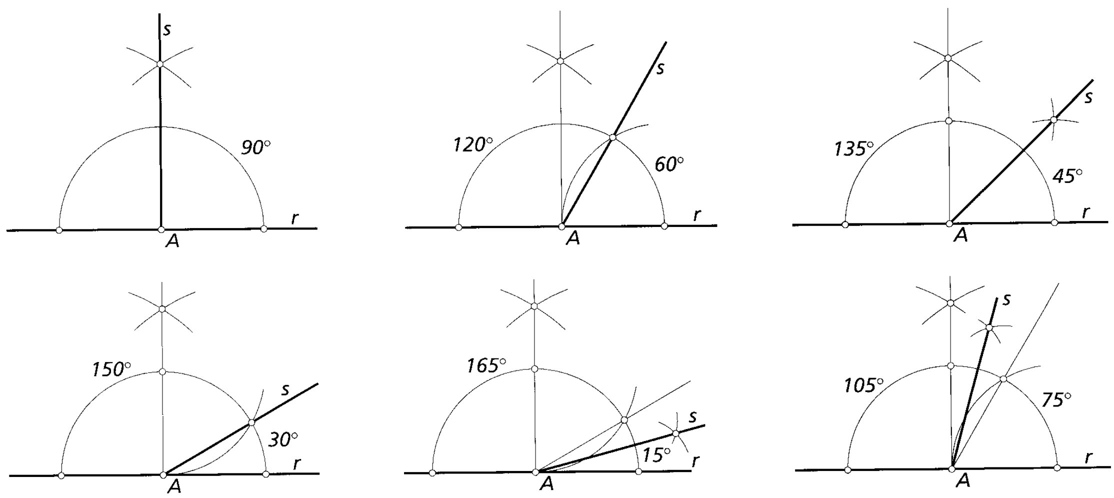
Sean los arcos de centros O_1 y O_2:



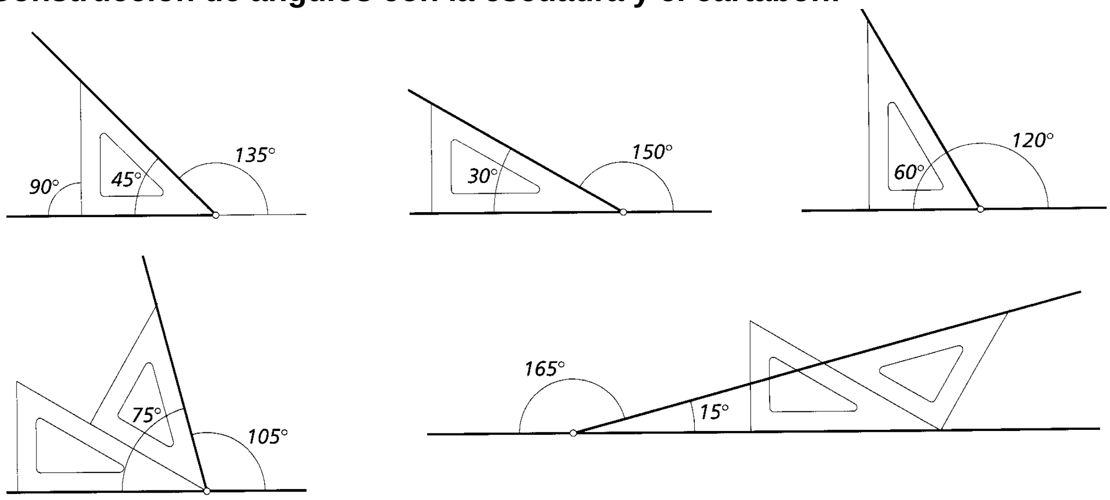
1. Por los puntos arbitrarios *B* y C de los arcos se trazar sendos radios, llevando sobre ellos divisiones iguales: 1, 2, 3, etc., y trazando arcos concéntricos.
2. Los puntos de intersección de los arcos correspondientes nos determinan la bisectriz del ángulo curvilíneo.

1.9. CONSTRUCCIÓN DE ÁNGULOS

Construcción de ángulos con el compás:



Construcción de ángulos con la escuadra y el cartabón:



2. ARCO CAPAZ

2.1. LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico es el conjunto de puntos que cumplen a condición común.

Ejemplos

La mediatriz de un segmento es e/lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos.
La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados del ángulo.

La esfera es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de uno fijo llamado centro.

El número de lugares geométricos existentes es muy grande e imposible de condensar en un tratado de dibujo como éste; no obstante, a lo largo del libro se irán viendo algunos de estos lugares geométricos.

2.2. CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

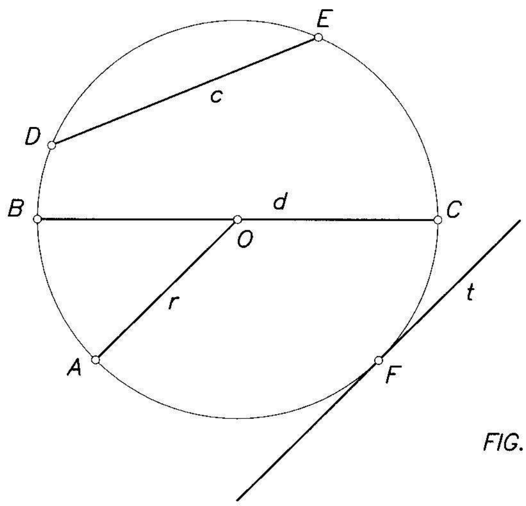


FIG. 1

Rectas de una circunferencia

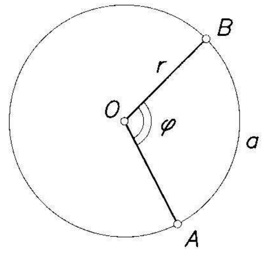
Radio (r): es el segmento *OA* de la recta que une el centro con cualquier punto de la circunferencia.

Diámetro (d): es el segmento que une los puntos *B* y C de intersección de la circunferencia con cualquier recta que pasa por el centro.

Cuerda (c): segmento *DE que* une dos puntos de la circunferencia sin pasar el centro.

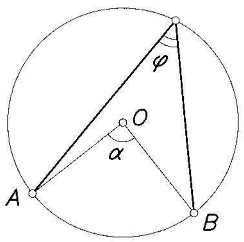
Tangente (t): es la recta que tiene un solo punto común *F* con la circunferencia.

Ángulos de una circunferencia



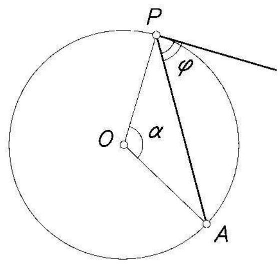
Ángulo central: el vértice del ángulo es el centro de la circunferencia. Su valor es:

$$\boldsymbol{\Phi = \alpha/r \cdot 180º/\pi}$$



Ángulo inscrito: el vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de la misma.

$$\boldsymbol{\varphi = \alpha/2}$$



Ángulo semiinscrito: el vértice es un punto de la circunferencia, uno de los lados es secante y el otro es tangente a la circunferencia.

$$\boldsymbol{\varphi = \alpha/2}$$

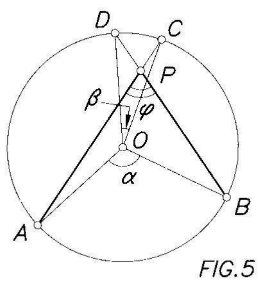


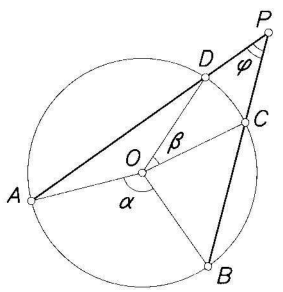
FIG.5

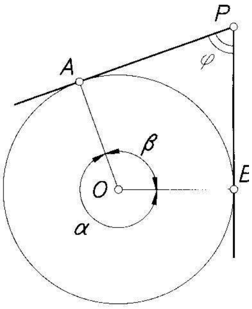
Ángulo interior: el vértice es un punto interior de la circunferencia.

$$\boldsymbol{\varphi = (\alpha+\beta)/2}$$

Ángulo exterior (fig. 6): el vértice es un punto exterior la circunferencia y los lados son rectas secantes.

$$\boldsymbol{\varphi = (\alpha-\beta)/2}$$





Ángulo circunscrito: el vértice es un punto exterior y los lados son rectas tangentes a la circunferencia.

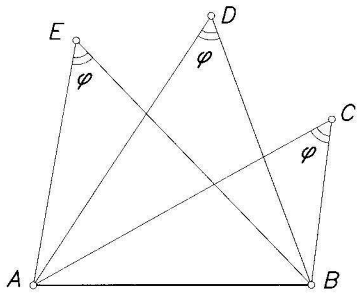
$$\boldsymbol{\varphi = (\alpha-\beta)/2}$$

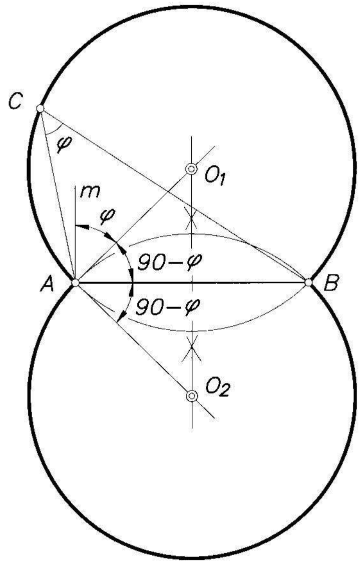
2.3. ARCO CAPAZ

Se llama arco capaz de un ángulo *φ* dado respecto a un segmento también conocido, al lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el segmento bajo el ángulo *φ.*

2.3.1 ARCO CAPAZ DE UN ÁGULO < DE 90º

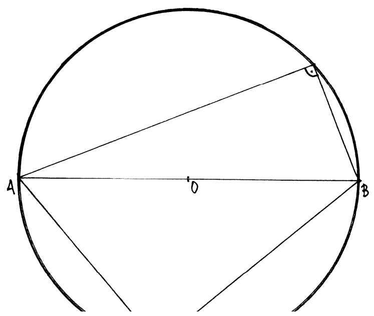
Dados el segmento *AB* y el ángulo:





1. Se traza la mediatriz del segmento *AB.*
2. Por uno de los extremos *A* del segmento dado, se traza la recta m perpendicular a *AB,* restando a continuación el ángulo *φ* hasta cortar a la mediatriz en 0_1, de tal forma que el ángulo 0_1AB es de *90º - φ.* 3 Se construye el ángulo simétrico de *90º - φ,* respecto de *AB,* hasta cortar a la mediatriz en O_2.
3. Con centros en O_1 y O_2 se trazan dos arcos de circunferencia que pasen por *A* y *B.* Dichos arcos son los arcos capaces buscados.
4. Siempre existen dos arcos, simétricos respecto al segmento, que cumplen la condición de arco capaz.
5. Estos arcos serán mayores de 180º.

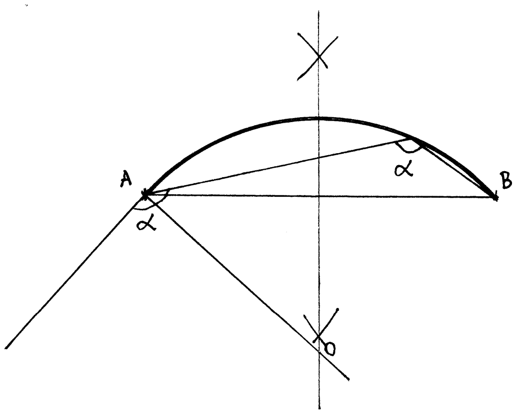
2.3.2 ARCO CAPAZ DE UN ÁGULO DE 90º



Se opera como en el caso anterior:

1. Con la diferencia que ahora el centro del arco capaz será el punto medio del segmento AB.
2. El arco capaz serán dos arcos de 180º.

2.3.2 ARCO CAPAZ DE UN ÁGULO > DE 90º



Se opera como en el caso anterior:

1. Con la diferencia que ahora el centro del arco capaz estará por debajo del segmento AB.
2. El arco capaz serán dos arcos menores de 180º. En la figura solo aparece uno para mayor claridad.

2.4. HALLAR LOS PUNTOS DESDE LOS QUE SE VEN DOS SEGMENTOS BAJO DOS ÁNGULOS DADOS RESPECTIVAMENTE

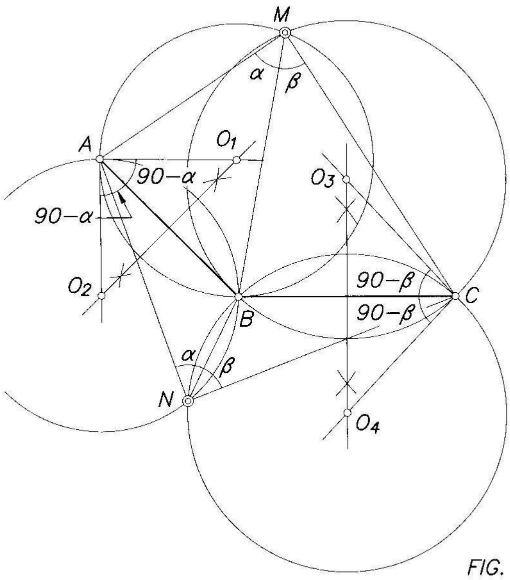


FIG.

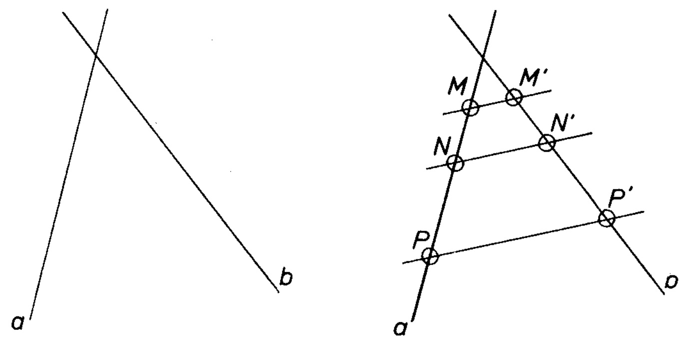
Dados los segmentos *AB* y *BC,* el ángulo *a* desde el que se ve el segmento *AB* y el ángulo *β* desde el que se ve el segmento *BC*.

1. Se dibuja el arco capaz de *a* respecto de *AB,* como ya se ha explicado, cuyos centros son O_1 y O_2.
2. Se dibuja el arco capaz de *β* , respecto de *BC,* cuyos centros son O_3 y O_4.
3. Los puntos *M* y *N* de intersección de los arcos capaces son los puntos desde los que se ve el segmento *AB* con un ángulo *α* y el segmento *BC* con un ángulo *β*.

PROPORCIONALIDAD, IGUALDAD Y SEMEJANZA

1. PROPORCIONALIDAD

Según el *Teorema de Thales*, si dos rectas coplanarias *a* y *b* son cortadas por un haz de rectas paralelas, los segmentos determinados sobre una de las dos rectas son proporcionales a los determinados sobre la otra.



Se cumplirá que:

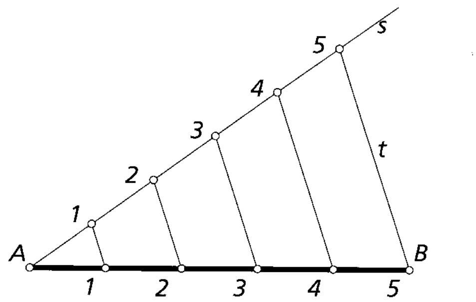
MN / M´N´ 0 NP / N´P´

Será cierta la proporcionalidad si se demuestra que a segmentos iguales les corresponden otros iguales, a mayores otros mayores a menores otros menores y a la suma de varios, la suma de sus correspondientes.

A continuación y apoyándonos en este teorema analizaremos algunas aplicaciones y relaciones que se pueden establecer entre segmentos.

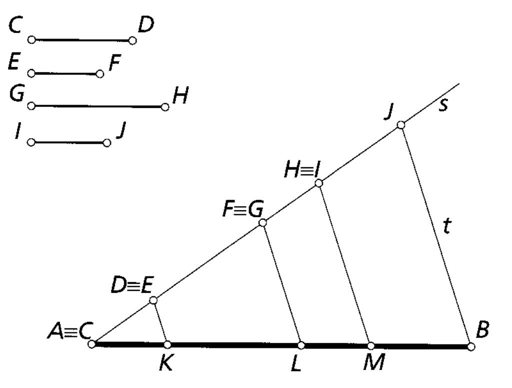
1.1 DIVIDIR UN SEGMENTO EN UN NÚMERO DE PARTES IGUALES

Dado el segmento *AB*:



4. Por uno de los extremos *A* se traza una recta cualquiera s.
5. Sobre la recta *s* se llevan tantos segmentos iguales, de longitud arbitraria, como número de partes se quiera dividir el segmento.
6. Se traza la recta *t* que une el último punto con el otro extremo *B* del segmento, y por los puntos *1, 2, 3*, etc., de la recta *s* se trazan paralelas a *t.*

1.2. DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES PROPORCIONALES A LAS DIMENSIONES DE OTROS SEGMENTOS



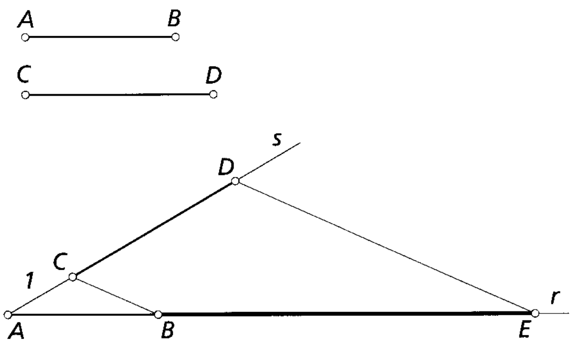
Dado el segmento *AB* y los segmentos *CD, EF, GH* e *IJ*:

4. Por uno de los extremos *A* del segmento *AB* se traza una recta cualquiera s.

5. Sobre la recta s se van llevando, uno a continuación del otro, los segmentos *CD, EF, GH* e *IJ.*
6. Se une el último punto *J* con el otro extremo *B* mediante la recta t, trazando a continuación paralelas a t por los puntos *E, G* e *I*.

1.3. DADOS DOS SEGMENTOS, HALLAR SU PRODUCTO

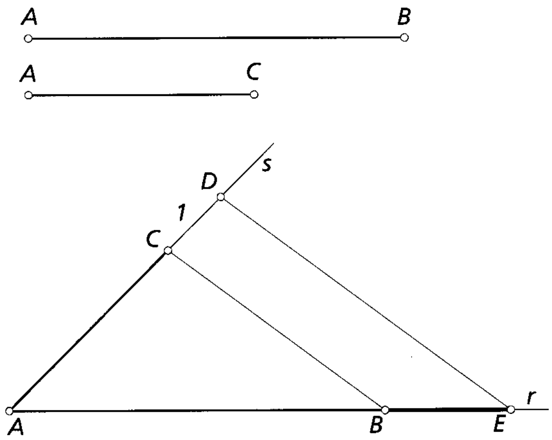
Dados los segmentos *AB* y *CD*:



1. Se trazan dos rectas cualesquiera *r* y *s* que se cortan en el punto *A*.
2. Sobre una de ellas se traslada uno de los segmentos, el *AB*, y sobre la otra el segmento unidad *AC* y a continuación el otro segmento *CD*.
3. Por el punto *D* se traza la recta paralela al segmento *BC* hasta cortar a *r* en el punto *E*.
4. El segmento *BE* es el producto de los segmentos dados.

1.4. DADOS DOS SEGMENTOS, HALLAR SU DIVISIÓN

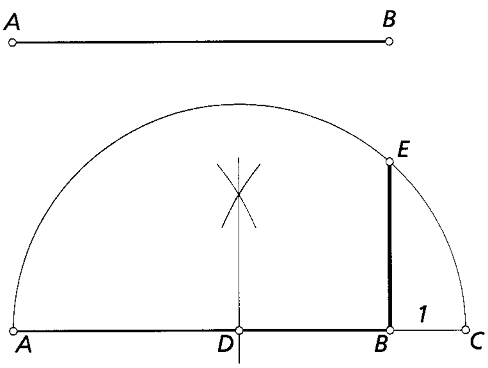
Dados los segmentos *AB* y *AC*:



1. Se trazan dos rectas cualesquiera *r* y *s* que se cortan en el punto *A.*
2. Sobre una de ellas se traslada uno de los segmentos, el *AB*, y sobre la otra el *AC*. A continuación del segmento divisor, en nuestro caso *AC*, se traslada el segmento unidad *CD*.
3. Por el punto D se traza la recta paralela al segmento BC hasta cortar a r en el punto E.
4. El segmento BE es el cociente de AB / AC.

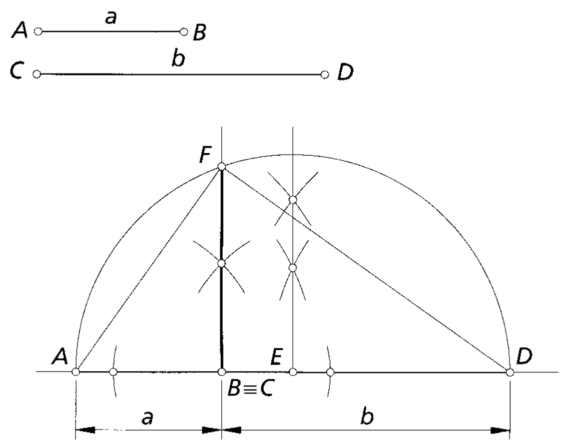
1.5. DADO UN SEGMENTO, HALLAR SU RAÍZ CUADRADA

Sea el segmento AB:



1. Sobre una recta se toma el segmento *AB* y a continuación el segmento unidad *BC*.
2. Con centro en *D,* punto medio de *AC*, se traza la semicircunferencia de diámetro *AC*.
3. La perpendicular trazada por *B* corta a la circunferencia en *E*. El segmento *BE* es raíz cuadrada de *AB*.

1.6. CONSTRUCCIÓN DEL SEGMENTO QUE SEA MEDIA PROPORCIONAL A DOS SEGMENTOS DADOS



Sean los segmentos *a* = *AB* y *b* = *CD.*

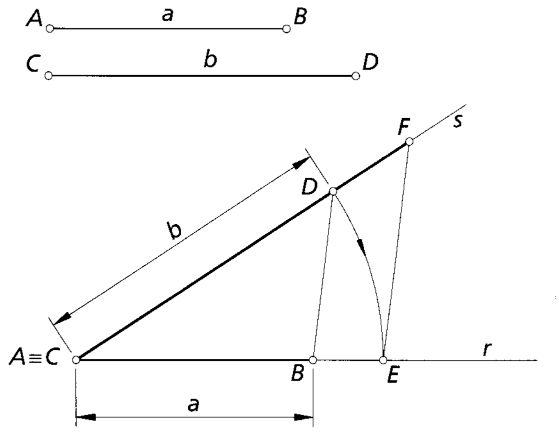
La media proporcional *x* a dos segmentos *a* y *b* se expresa así:

$$a / x = x / b$$

Construcción gráfica:

1. Sobre una recta se trasladan los segmentos dados y con centro en *E*, punto medio de *AD*, se traza la semicircunferencia de radio *EA*.
2. La perpendicular trazada por *B* a la recta *r* corta a la circunferencia en el punto *F.* El segmento *x* = *BF* es la media proporcional entre los segmentos dados.

1.7. CONSTRUCCIÓN DE LA TERCERA PROPORCIONAL A DOS SEGMENTOS DADOS



Sean los segmentos *a* = *AB* y *b* = *CD*.

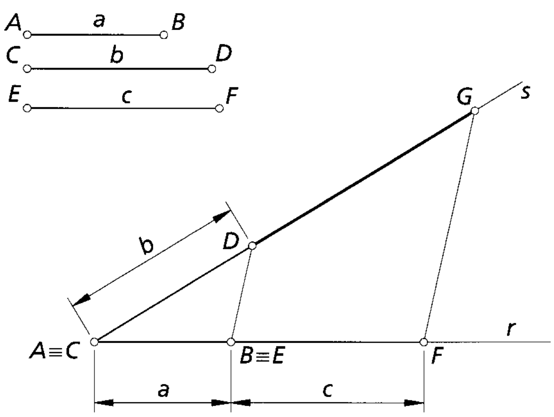
La tercera proporcional *x* a dos segmentos *a* y *b* se expresa así:

$$A / b = b / a$$

Construcción gráfica:

1. Se trazan dos rectas *r* y *s* que se corten.
2. A partir del punto *A* de intersección se lleva *AB* sobre la recta *r* y *CD* sobre la recta s.
3. Con centro en *A* y radio *AD* se describe un arco que corta a la recta *r* en el punto *E*.
4. Por el punto *E* se traza la recta paralela a *BD* que corta a la recta *s* en el punto *F*. El segmento *x* = *AF* es la tercera proporcional.

1.8. CONSTRUCCIÓN DE LA CUARTA PROPORCIONAL A TRES SEGMENTOS DADOS



Sean los segmentos *a* = *AB*, *b* = *CD* y *c* = *EF.*

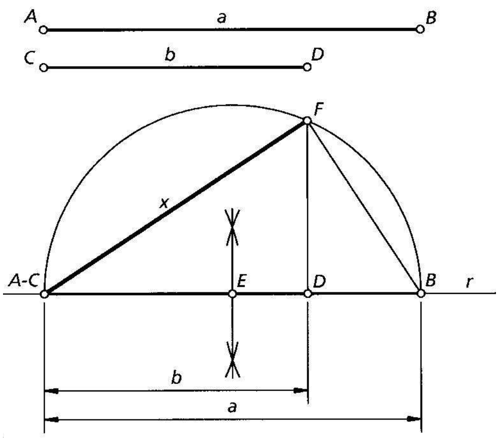
La cuarta proporcional *x* a tres segmentos *a, b* y *c* se expresa así:

$$a / b = c / x$$

Construcción gráfica:

1. Se trazan dos rectas *r* y *s* cualesquiera que se corte
2. A partir del punto *A* de intersección se lleva *AB* sol la recta *r* y *CD* sobre la recta s.
3. Sobre la recta *r* y a continuación del segmento *AB* traslada el segmento *EF.*
4. Por el punto *F* se traza la recta paralela a *BD* que corta a la recta *s* en el punto *G*. El segmento *x = D* es la cuarta proporcional.

1.9. TEOREMA DEL CATETO



En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.

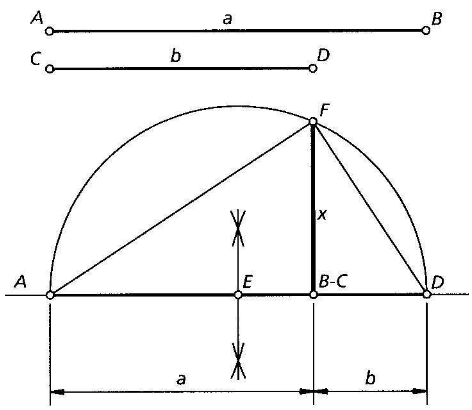
Sean los segmentos *a = AB* y *b = CD*:

$$a/x = x/b$$

Construcción gráfica:

1. Sobre una recta *r* se trasladan, a partir de un mismo punto *A ≡ C*, los segmentos *AB = a* y *CD = b,* y se dibuja la semicircunferencia de diámetro *AB,* el mayor de los dos segmentos.
2. Por el punto *D* se traza la perpendicular a la recta *r* hasta cortar a la semicircunferencia en el punto *F.* El segmento *x = AF es* la media proporcional entre los dos segmentos dados.

1.10. TEOREMA DE LA ALTURA



En todo triángulo rectángulo la altura sobre la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que queda dividida la hipotenusa. Sean los segmentos *a = AB* y *b = CD*:

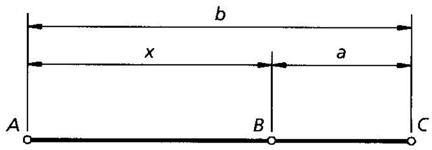
$$a/x = x/b$$

Construcción gráfica:

1. Sobre una recta *r* se trasladan los segmentos *AB = a* y *CD = b,* y con centro en *E,* punto medio de *AD,* se traza la semicircunferencia de diámetro *AD.*
2. La perpendicular trazada por *B ≡ C* a la recta *r* corta a la semicircunferencia en el punto *F.* El segmento *x = BF* es la media proporcional entre *AB* y *CD.*

1.11. SECCIÓN ÁUREA DE UN SEGMENTO

Se denomina sección áurea de un segmento *AC* a la división que le produce un punto *B* de tal forma que la proporción que existe entre la parte más pequeña y la parte más grande es la misma que hay entre la parte más grande y el todo. Es decir:

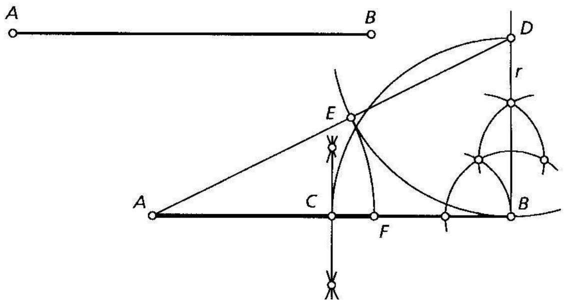


$$a/x = x/b$$

1.12. DADO UN SEGMENTO, HALLAR SU DIVISIÓN ÁUREA

Dado el segmento *AB*:

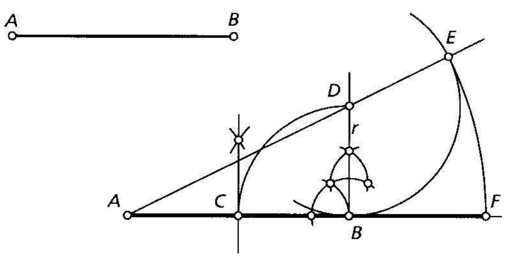
1. Por uno de los extremos *B,* se traza una recta *r* perpendicular al segmento.
2. Se halla el punto medio *C* del segmento *AB* trazando su mediatriz, y con centro en *B* y radio *BC* se describe un arco hasta cortara *en* el punto *D.*
3. Se une el punto *D* con el otro extremo *A,* y con centro en *D* y radio *OB* se describe un arco hasta cortar a la recta *AD* en el punto *E.*
4. Con centro en *A* y radio *AE* se traza otro arco hasta cortar al segmento *AB* en el punto *F.* El segmento *AF* es la parte áurea de *AB.*



1.13. HALLAR EL SEGMENTO CUYA DIVISIÓN ÁUREA ES UN SEGMENTO DADO

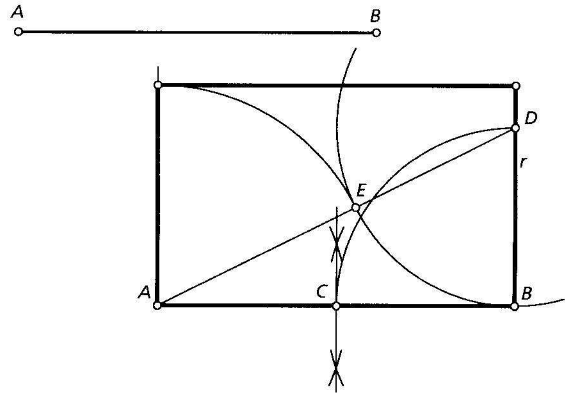
Dado el segmento *AB*:

1. Por uno de los extremos *B,* se traza la recta *r* perpendicular al segmento.
2. Se halla el punto medio C del segmento *AB* trazando su mediatriz, y con centro en *B* y radio *BC* se describe un arco hasta cortar a *r* en el punto *D.*
3. Se une el punto *D* con el otro extremo *A,* y con centro en *D* y radio *DB* se describe un arco hasta cortar a la prolongación de la recta *AD* en el punto *E.*
4. Con centro en *A* y radio *AE* se traza otro arco hasta cortar a la prolongación del segmento *AB* en *F. AF* es el segmento cuya parte áurea es *AB.*



1.14. RECTÁNGULO ÁUREO

Se denomina rectángulo áureo a aquel cuyos lados están relacionados según la proporción áurea.
Dado el lado *AB*:



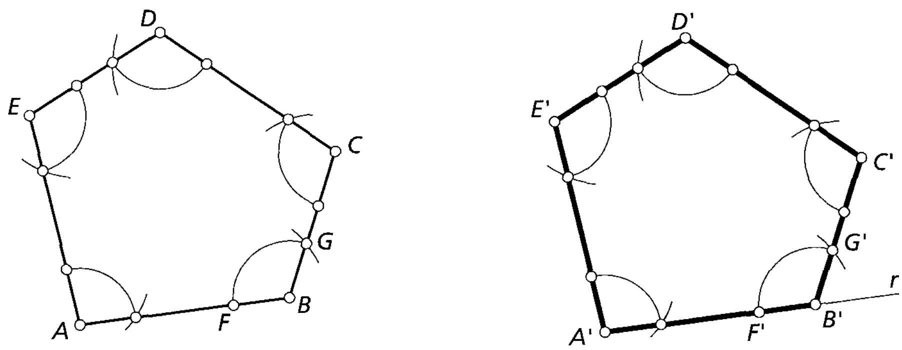
1. Por uno de los extremos *B,* se traza una recta *r* perpendicular al segmento *AB* y sobre ella se traslada el segmento *BD=1/2 AB.*
2. Con centro en *D* y radio *DB* se describe un arco hasta cortar a la recta *AD* en el punto *E.* El segmento *AE* es el otro lado del rectángulo.

2. IGUALDAD

Dos figuras son iguales cuando sus lados y sus ángulos son iguales y además están en el mismo orden.

2.1. CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA IGUAL A OTRA POR COPIA DE ÁNGULOS

Dado el polígono *ABCDE*:

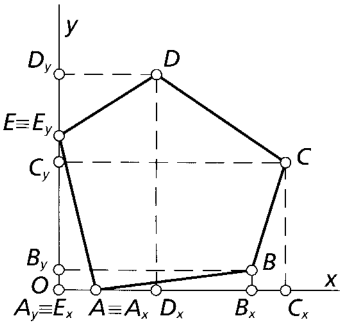


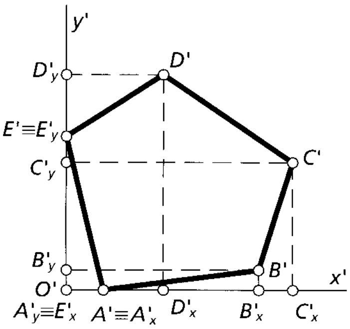
1. Sobre una recta *r* cualquiera, se toma un segmento *A'B'* = *AB.*
2. Con centro en el vértice *B'* se traza un ángulo igual al del vértice *B:*
   a) con centro en *B* se dibuja un arco que corta a los lados del ángulo en los puntos *F* y *G*;
   b) con centro en *B'* se dibuja otro arco del mismo radio que el anterior;
   c) Con radio *FG, y* centro *F*, se traza un arco que corta al último en el punto G',
   d) uniendo el punto *G'* con *B'* se obtiene el ángulo buscado.
3. Sobre el lado obtenido en el punto anterior se toma un segmento *B'C'* = *BC.*
4. Con centro en el punto *C´* se dibuja un ángulo igual al del vértice *C*, repitiendo la operación 2.

Y así sucesivamente se van construyendo los lados y los ángulos hasta cerrar el polígono.

2.2. CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA IGUAL A OTRA POR COORDENADAS

Dado el polígono *ABCDE*:

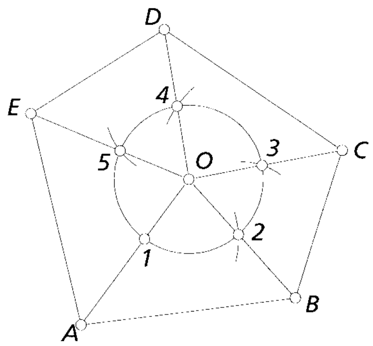


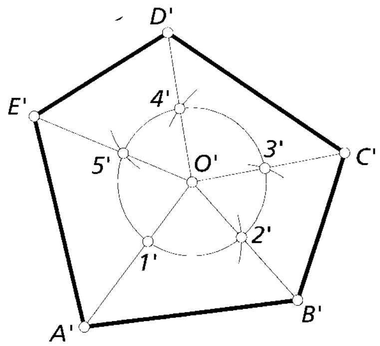


1. Se dibujan dos ejes coordenados *X* e *Y* cualesquiera.
2. Se proyectan todos los vértices de la figura sobre el eje X(puntos A_x, B_x, C_x, etc.) y sobre el eje *Y* (puntos A_y, B_y, C_y, etc.).
3. Sobre dos nuevos ejes coordenados cualesquiera *X'* e *Y'* se llevan, a partir del origen, las distancias $O'A'x = OA_X$, $O'B'_X = OB_X$, $O'C'_X = OC_x$, etc., sobre el eje *X'*, y $O'A'_y = OA_y$, $O'B'_y = OB_y$, $O'C'_y = OC_y$, etc., sobre el otro eje *Y'*.
4. Por los puntos hallados anteriormente se trazan perpendiculares a los ejes respectivos *X'* e *Y'*, de tal forma que los puntos de intersección son los vértices del nuevo polígono *A'B'C'D'E'*.

2.3. CONSTRUCCION DE UNA FIGURA IGUAL A OTRA POR RADIACIÓN

Dado el polígono *ABCDE*:



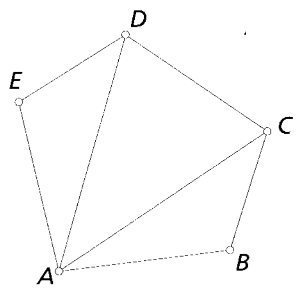


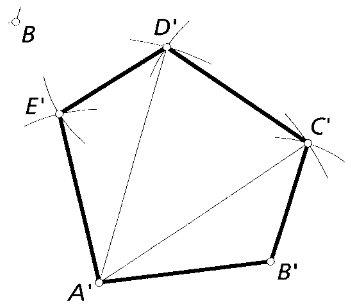
1. Se elige un punto *O* cualquiera, dentro o fuera del polígono, uniéndolo a continuación con todos y cada uno de los vértices.
2. Con centro en el punto *O* y radio arbitrario se traza una circunferencia cualquiera, y con centro en otro punto exterior *O'* se traza otra circunferencia de radio igual a la anterior.
3. Por copia de ángulos, se van trazando todas las rectas que parten del punto *O'*.
4. Sobre cada uno de los rayos anteriores se llevan las distancias $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, $O'C' = OC$, etc.

2.4. CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA IGUAL A OTRA POR TRIANGULACIÓN

Este método es similar al anterior, solo que en vez de elegir un punto cualquiera, se elige uno de los vértices del polígono *ABCDE*.

1. Se une un vértice, por ejemplo el *A,* con todos los demás vértices.
2. Por copia de triángulos, se van construyendo todos los triángulos *A'B'C'*, *A'C'D' y A'D'E'* iguales a los triángulos *ABC, ACD y ADE* del polígono dado.



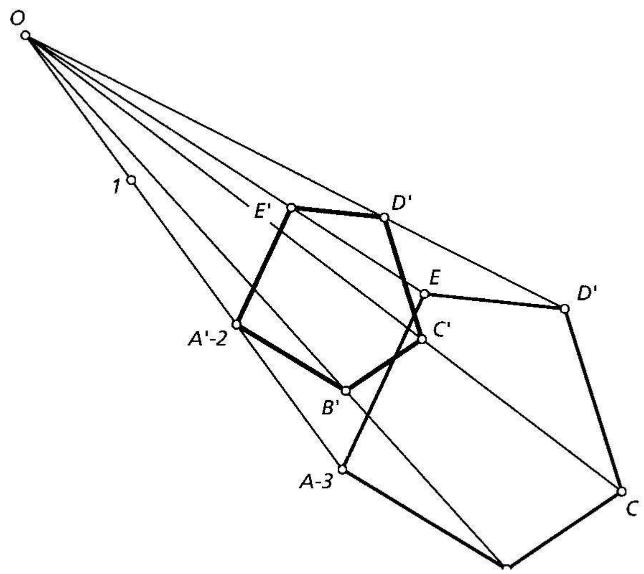


Se podría haber trazado una circunferencia de radio arbitrario con centro en A y haber aplicado el procedimiento anterior, por radiación.

1. SEMEJANZA

1.1 CONSTRUCCIÓN DE UNA FIGURA DIRECTAMENTE SEMEJANTE A OTRA CONOCIENDO LA RAZÓN DE SEMEJANZA

Dado el polígono *ABCDE*, supongamos que la razón de semejanza es 2/3:



1. Se toma un punto arbitrario *O* y se une con todos los vértices del polígono dado.
2. Uno de los segmentos así hallados, por ejemplo *OA,* se divide en tantas partes como indique el denominador de la razón de semejanza, en nuestro caso tres, ya partir del punto *O* se toman tantas partes como indique el numerador; el punto así hallado es *A',* llamado punto homólogo del *A.*
3. Por el punto *A'* se traza la paralela a la recta *AB* hasta cortar a la recta *OB* en el punto *B'.*
4. Por el punto *B'* se traza la paralela a la recta *BC* hasta cortar a la recta *OC* en el punto *C',* y así sucesivamente hasta cerrar el polígono solicitado.

Ejercicio de aplicación

Sea la circunferencia de centro *O* y los radios *OA* y *OB*, trazar la cuerda de la circunferencia que queda dividida en tres partes iguales por los dos radios.

1. Se unen los puntos *A* y *B* mediante una recta y sobre ella se determinan los puntos *C* y *D* de manera que *BC* = *AD* = *AB.*
2. Las rectas que unen los puntos C y *D* con el centro *O* se cortan con la circunferencia en los puntos *E* y *F.* La recta *EF* es la cuerda que se busca.

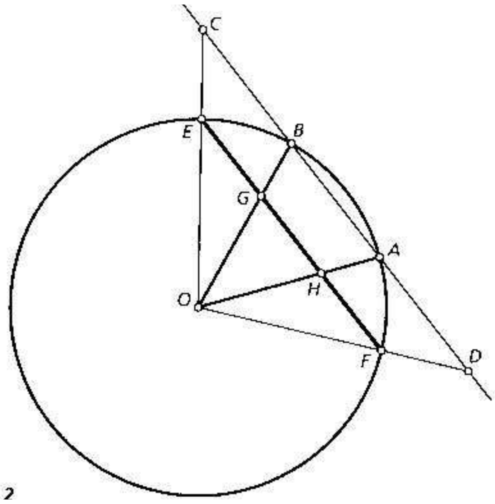


FIG. 2

TRIÁNGULOS

1. TRIÁNGULOS

1.1. DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN

Definición

Triángulo es una superficie plana limitada por tres erectas que se cortan dos a dos. Los puntos de intersección de las rectas se llaman *vértices*, y los segmentos comprendidos entre los vértices se denominan *lados* del triángulo.

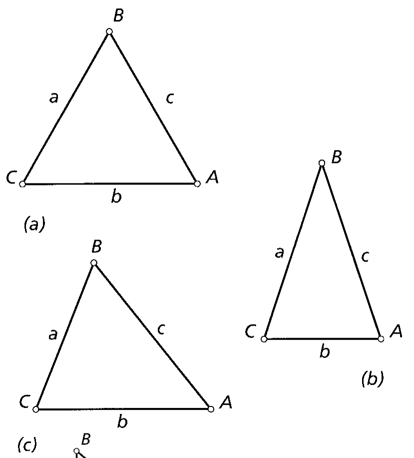
Los vértices se designan con letras mayúsculas latinas en sentido contrario a las agujas del reloj, y los lados se designan con letras minúsculas también latinas, utilizando para ello la misma letra del vértice opuesto; el lado a será el lado opuesto al vértice *A*.

Propiedades

a) La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo vale 180º.
b) Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, pero mayor que su diferencia.
c) En un triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cada uno de sus catetos.

Clasificación

1. ***Según sus lados:***

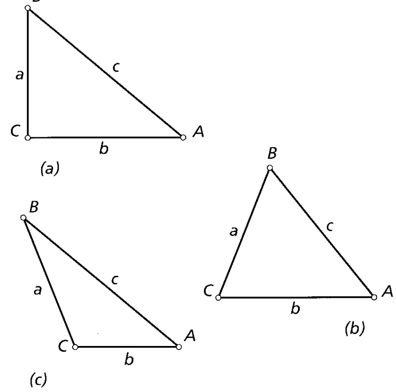


- *Equilátero (a)*: los tres lados son iguales.

- *Isósceles (b)*: dos lados son iguales y el tercero distinto.

- *Escaleno (c)*: los tres lados son desiguales.

2. ***Según sus ángulos:***



- *Rectángulo (a)*: un ángulo es recto (= 90º).

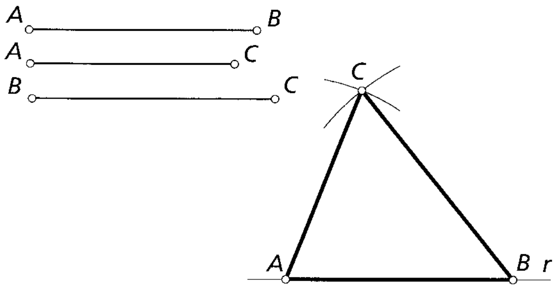
- *Acutángulo (b)*: los tres ángulos son agudos (< 90º).

- *Obtusángulo (c)*: un ángulo es obtuso (> 90º).

2. CONSTRUCCIÓN

2.1. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO CONOCIENDO SUS TRES LADOS

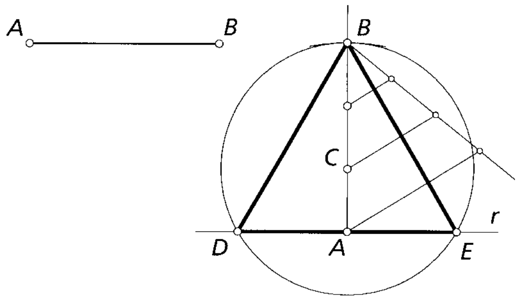
Sean los segmentos *AB, AC* y *BC*:



1. Sobre una recta r cualquiera se toma un segmento *AB* igual a uno de los lados.
2. Con centro en un extremo *A* y radio igual al segundo de los lados *AC*, se describe un arco de circunferencia.
3. Con centro en el otro extremo *B* y radio igual al tercero de los lados conocidos *BC*, se describe otro arco que se corta con el anterior en el punto *C*, tercer vértice del triángulo.

2.2. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO CONOCIENDO LA ALTURA

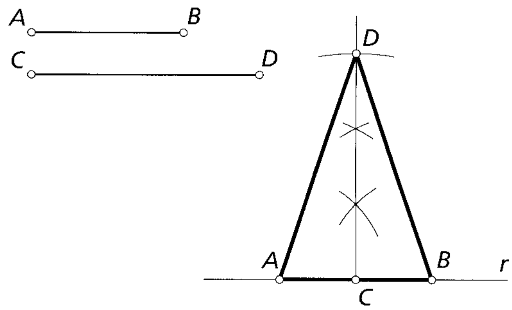
Sea *AB* la altura del triángulo:



1. Sobre una recta r cualquiera se toma un punto *A* arbitrario.
2. Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta *r*.
3. Sobre la perpendicular anterior, y a partir del punto *A*, se lleva una longitud *AB* igual a la altura dada.
4. La altura *AB* se divide en tres partes iguales, nombrando al punto *C* primero a partir de la base.
5. Con centro en el punto *C* y radio *CB*, dos tercios de la altura, se describe una circunferencia que cortará a la recta *r* inicial en dos puntos *D* y *E*, que junto con el vértice *B* forman el triángulo solicitado.

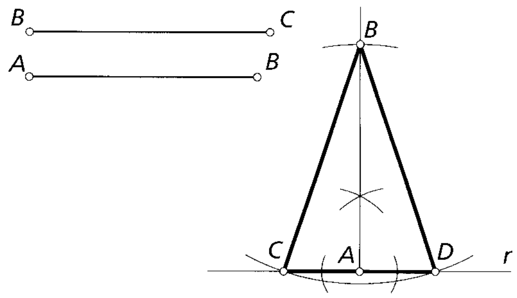
2.3. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LA BASE Y LA ALTURA

Sea *AB* la base y *CD* la altura:



1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual a la base.
2. Se traza la mediatriz del segmento *AB*.
3. Sobre la mediatriz, y a partir del punto medio *C*, se transporta la altura *CD*, quedando determinado el tercer vértice *D*.

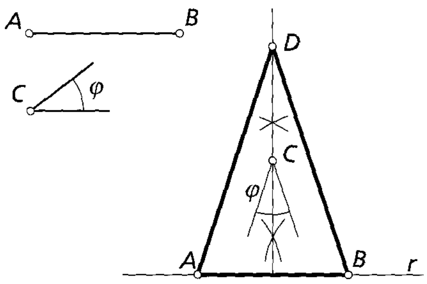
2.4. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LOS LADOS IGUALES Y LA ALTURA



Sea *BC* el lado y *AB* la altura:

1. Sobre una recta *r* se toma un punto *A* arbitrario.
2. Por el punto *A* se traza la perpendicular a la recta *r.*
3. Sobre la perpendicular anterior, y a partir del punto *A* se transporta la altura dada *AB*.
4. Con centro en el punto *B* y radio igual al lado se describe un arco que corta a la recta *r* en dos puntos *C* y *D* que, junto con el punto *B*, son los vértices del triángulo.

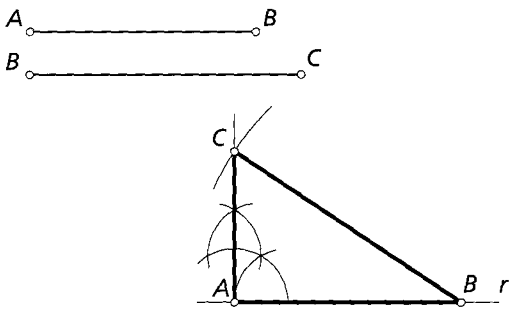
2.5. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ISÓSCELES CONOCIENDO LA BASE Y EL ÁNGULO OPUESTO A LA MISMA



Sea AB la base y (p el ángulo:

1. Sobre una recta *r* cualquiera se toma un segmento *AB* igual a la base.
2. Se traza la mediatriz del segmento *AB*.
3. Por un punto *C* cualquiera de la mediatriz se traza un ángulo igual al dado, de tal forma que la mediatriz sea la bisectriz del ángulo.
4. Por los extremos del segmento *AB* se trazan sendas paralelas a los lados del ángulo anterior. Dichas paralelas se cortan en el punto *D*, tercer vértice del triángulo que se pide.

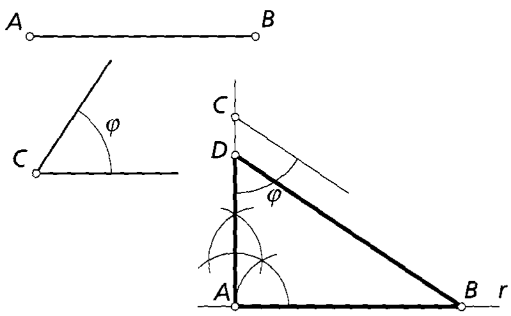
2.6. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIENDO LA HIPOTENUSA Y UN CATETO



Sea *AB* el cateto y *BC* la hipotenusa:

1. Sobre una recta r cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido.
2. Por un extremo *A* se traza la perpendicular a la recta *r.*
3. Con centro en el otro extremo *B* y radio igual a la hipotenusa, se traza un arco de circunferencia que corta a la perpendicular en el punto *C*, que será el tercer vértice.

2.7. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIENDO UN CATETO Y EL ÁNGULO OPUESTO



Sea *AB* el cateto y *φ* el ángulo:

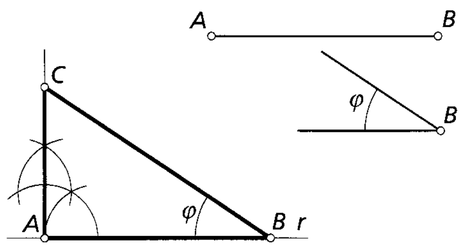
1. Sobre una recta r cualquiera se to-

ma un segmento *AB* igual al cateto conocido.
2. Por un extremo *A* se traza la perpendicular a la recta *r.*
3. Por un punto *C* cualquiera de la perpendicular se traza una recta que forme un ángulo igual al dado.
4. Por el otro extremo *B* del cateto se traza la paralela al lado del ángulo construido anteriormente. Esta paralela corta a la perpendicular trazada por el extremo *A* en el punto *D*, que será el tercer vértice.

2.8. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCIENDO UN CATETO Y EL ÁNGULO ADYACENTE NO RECTO

Sea *AB* el cateto y *φ* el ángulo:

1. Sobre una recta r cualquiera se toma un segmento *AB* igual al cateto conocido.
2. Por un extremo *A* se traza la perpendicular a *r*.
3. Por el otro extremo *B* se construye un ángulo igual al dado.
4. Donde el lado del ángulo anterior se corta con la perpendicular trazada por *A* se obtiene el vértice *C.*

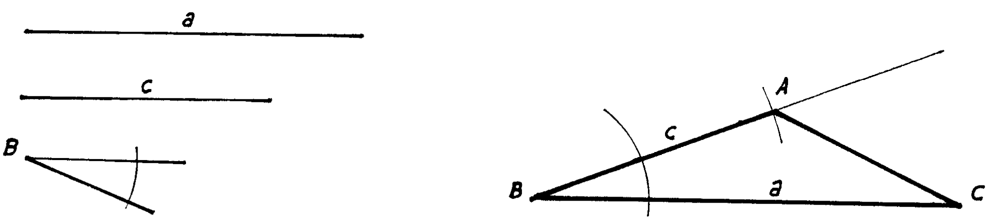


2.9. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ESCALENO CONOCIENDO DOS LADOS Y EL ANGULO COMPRENDIDO (a, c, B)

1. Sobre uno de los extremos del lado a trasladamos el ángulo B.

2. Sobre el lado libre del ángulo B, trasladamos el lado c, obteniendo el vértice C. (fig 1)

Fig 1



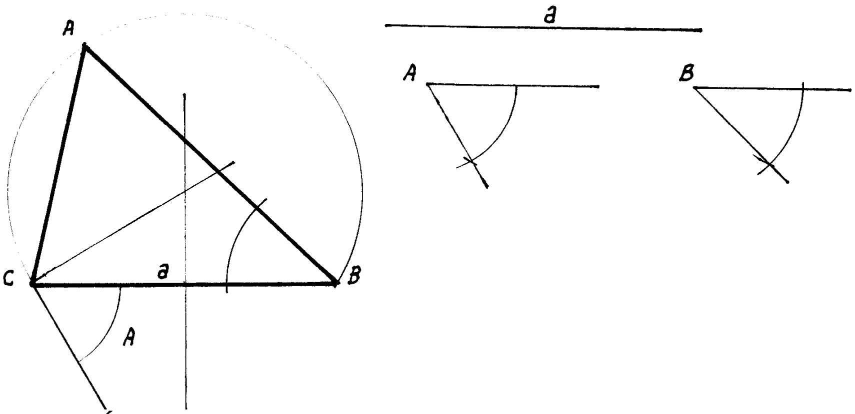
2.10. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ESCALENO CONOCIENDO UN LADO, Y LOS ANGULOS OPUESTO Y ADYACENTE. (a, A, B)

Vamos a solucionarlo aplicando el arco capaz.

1. Trazamos el arco capaz del lado a y el ángulo A

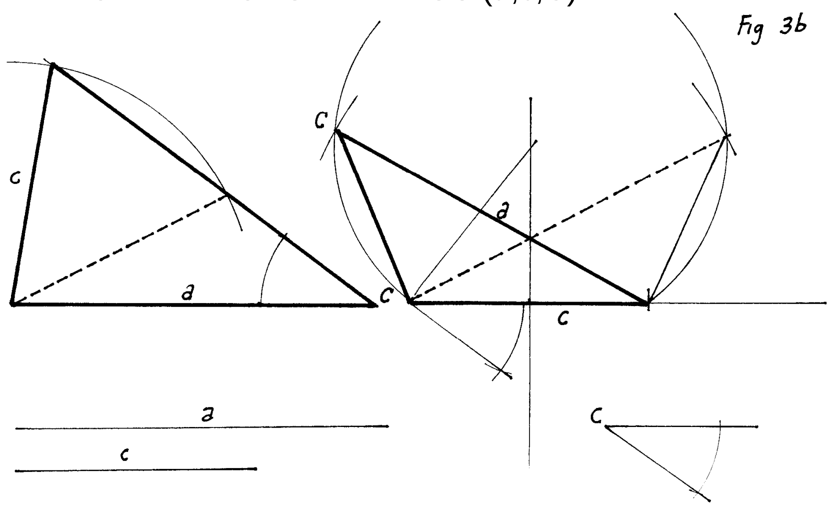
2. En el otro extremo del lado a, situamos el ángulo B, cuyo lado cortará al arco capaz en un punto que será el vértice A. (fig.2)

Fig 2



2.11. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO ESCALENO CONOCIENDO DOS LADOS Y EL ANGULO ADYACENTE A UNO DE ELLOS (a,c,C)

Fig.3a Fig 3b



1. En el extremo del lado a, trasladamos el ángulo C.
2. Con centro en el otro extremo de a, trazamos un arco de radio c, obteniendo así el tercer vértice A. (fig.3a)

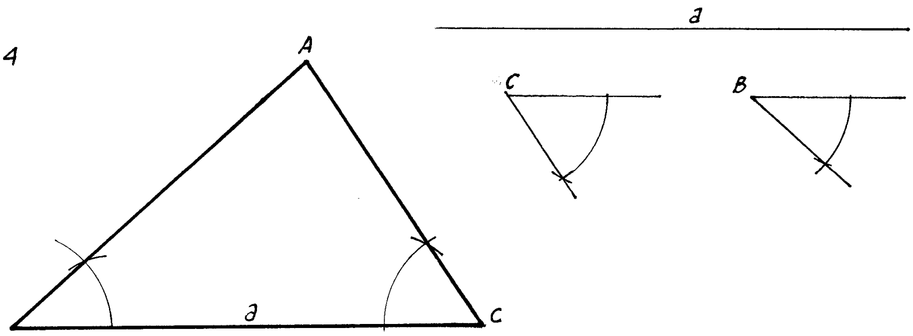
Por arco capaz:

1. Trazamos el arco capaz del lado c y el angulo C
2. Desde el otro extremo de c, trasladamos el lado a hasta cortar al arco, determinando el vértice C. (fig 3b)

2.12. CONSTRUIR UN TRIANGULO ESCALENO CONOCIENDO UN LADO Y DOS ANGULOS ADYACENTES (a,B,C).

1. En los extremos del lado a, se trasladan ambos ángulos. (fig.4)

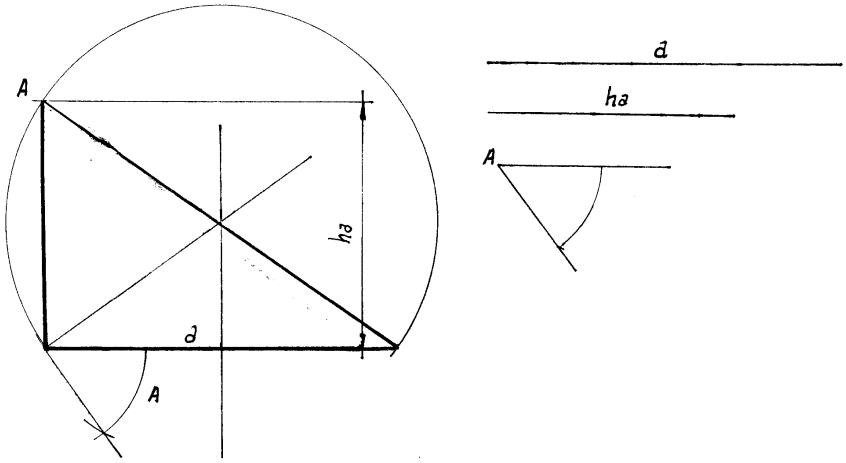
Fig. 4



2.13. CONSTRUIR UN TRIANGULO ESCALENO CONOCIENDO UN LADO, EL ANGULO OPUESTO Y LA ALTURA SOBRE ESE LADO (A.a,Ha)

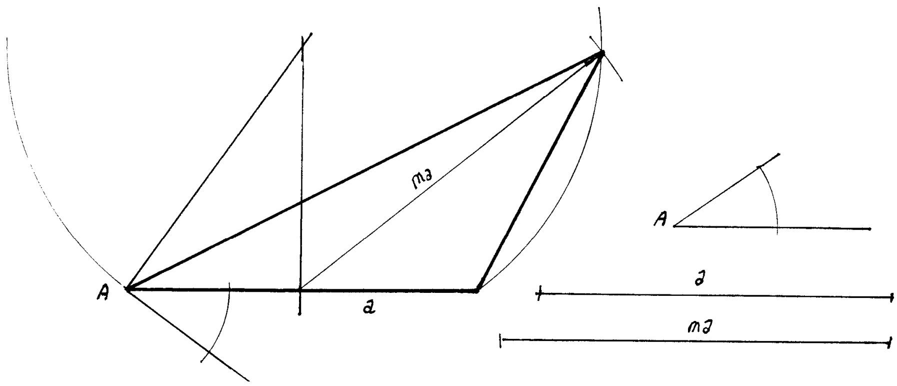
1. Hallamos el arco capaz del lado a y el ángulo A
2. Desde cualquier punto de a (o su prolongación) trazamos una perpendicular y trasladamos la altura, trazando después paralela al lado a hasta cortar al arco en el vértice A. (fig.5)

Fig.5



2.14. CONSTRUIR UN TRIANGULO ESCALENO CONOCIENDO UN LADO, EL ANGULO OPUESTO Y LA MEDIANA DE ESE LADO(a, A, m_a)

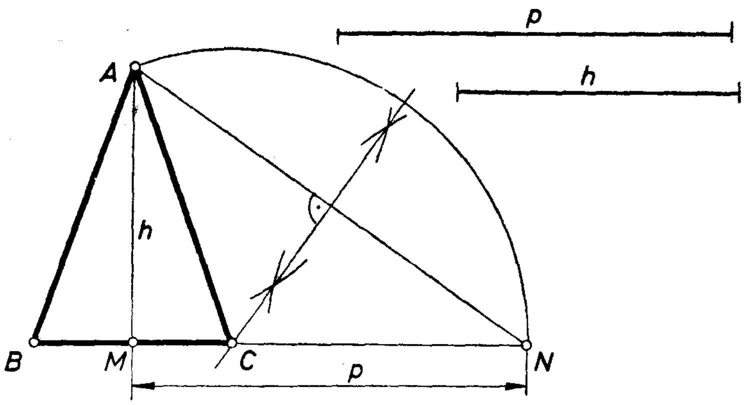
Fig.6



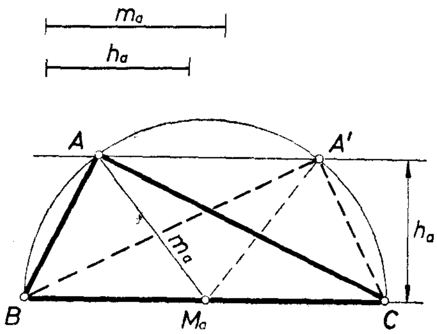
1. Hallamos el arco capaz del lado a y el ángulo A.
2. Desde el punto medio del lado trazamos un arco de magnitud igual a la mediana.
3. En la intersección de los dos arcos estará el vértice A. (fig.6)

2.15. CONSTRUIR UN TRIANGULO ISOSCELES CONOCIDO EL SEMIPERIMETRO Y LA ALTURA (p, h).

Trazar la altura AM y el semiperímetro MN formando ángulo recto. La mediatriz del segmento AN determina sobre MN el vértice C, obteniéndose el B por simetría de C respecto a M.
En el triángulo ACN, que es isósceles por construcción, AC = CN de donde MN = MC + CN = MC + CA = p, semiperímetro conocido.

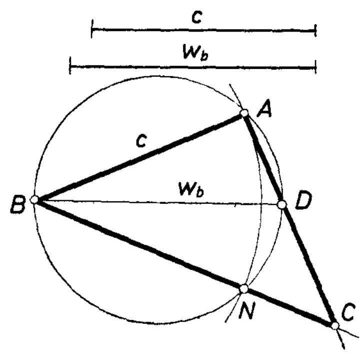


2.16. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DADAS LA MEDIANA m_a Y LA ALTURA h_a CORRESPONDIENTES A LA HIPOTENUSA.



Dado que la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide dos veces su mediana correspondiente, el problema se reduce a la construcción de un triángulo rectángulo conocida la hipotenusa y la altura relativa a dicha hipotenusa.
Para ello, tómese por hipotenusa un segmento BC igual a dos veces m_a, describiendo con centro en su punto medio M_a una semicircunferencia. Trazando una paralela a BC a una distancia igual a ha queda determinado, en su intersección con la semicircunferencia, el vértice A. La intersección A' produce otra solución simétrica.

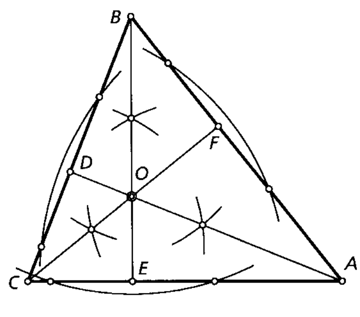
2.17. CONSTRUIR UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DADOS UN CATETO c Y LA BISECTRIZ w_b CORRESPONDIENTE AL OTRO CATETO.



Se traza una circunferencia de diámetro igual a la bisectriz w_b y con centro en B, extremo de uno de sus diámetros BD, se transporta sobre la circunferencia el cateto conocido, obteniendo los puntos A y N en uno y otro sentido. Uniendo A con D y B con N se determina el vértice C.

Efectivamente w_b es bisectriz del ángulo B al ser los arcos AD y DN iguales por construcción. El ángulo en A es recto al estar inscrito en media circunferencia.

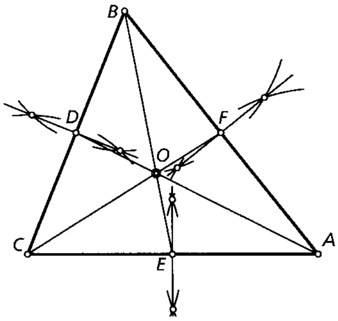
3. RECTAS Y PUNTOS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS



Altura

Altura de un triángulo es la perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto. Un triángulo tiene tres alturas.

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado *ortocentro*.



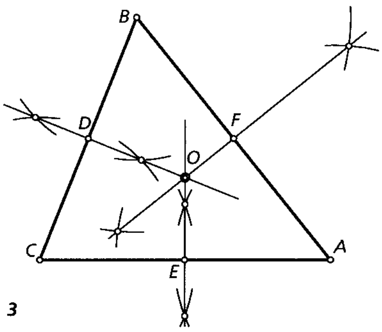
Mediana

Mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Un triángulo tiene tres medianas.

Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto que se llama *baricentro*. El baricentro de un triángulo es el centro de gravedad del mismo y está a una distancia de los vértices igual a los dos tercios de la longitud total de la correspondiente mediana.

Mediatriz

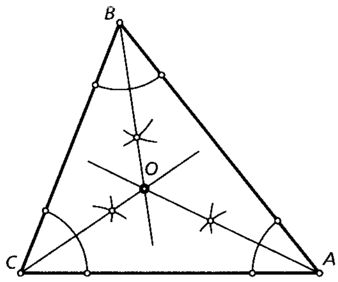
Mediatriz es la perpendicular trazada por el punto medio de un lado. Un triángulo tiene tres mediatrices.
Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado *circuncentro*; se llama así por ser el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



G. 3

Bisectriz

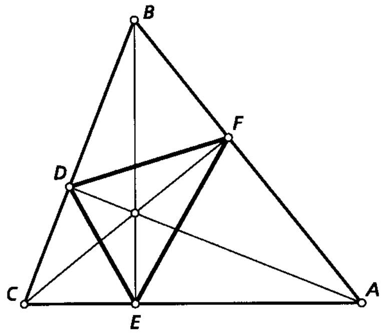
Bisectriz de un triángulo es, como su propio nombre indica, la recta que divide uno de los ángulos en dos ángulos iguales. Un triángulo tiene tres bisectrices interiores.
Las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto, llamado *incentro*. Se llama *incentro* por ser el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

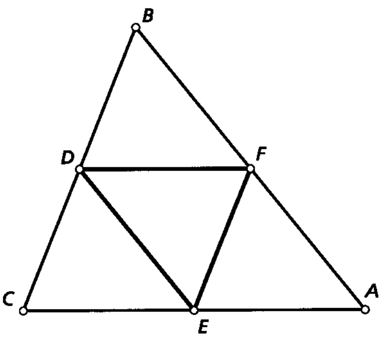


3.1. OTROS TRIÁNGULOS Y RECTAS NOTABLES

Triángulo órtico

Se llama así al triángulo cuyos vértices son los pies de las tres alturas de un triángulo.



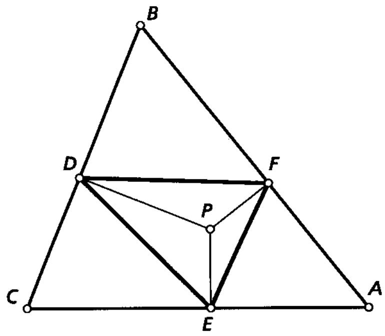


Triángulo complementario

Es aquel cuyos vértices son los puntos medios de los tres lados de otro triángulo.

Triángulo podar

Se denomina triángulo podar de un triángulo dado, respecto de un punto P, al triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares a los lados trazadas desde el punto P.

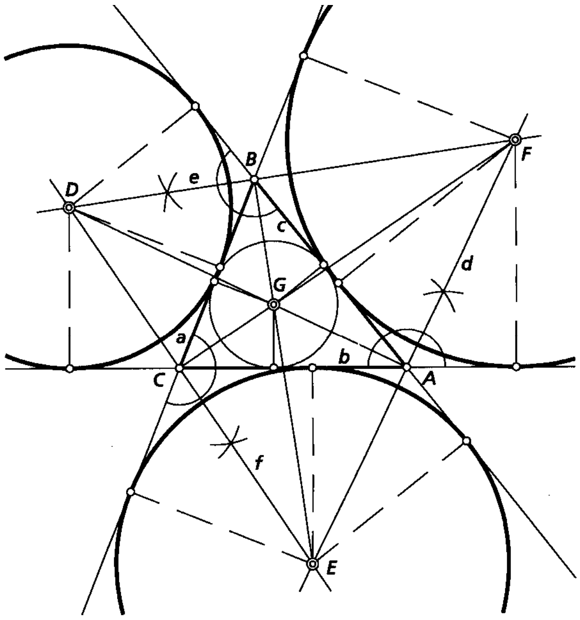


Ceviana

Es la línea que une un vértice con cualquier punto del lado opuesto.

Bisectrices exteriores

Las tres bisectrices exteriores de un triángulo se cortan en tres puntos que son los centros de las circunferencias *exinscritas* (inscritas por el exterior).



CUADRILÁTEROS

1. CUADRILÁTEROS

1.1. DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN

Definición

Cuadrilátero es la superficie plana limitada por cuatro rectas que se cortan dos a dos; los puntos de intersección se llaman vértices y los segmentos entre los vértices reciben el nombre de lados. Puede definirse también como un polígono de cuatro lados. Al igual que en los triángulos, sus vértices se designan con letras mayúsculas y sus lados con minúsculas.

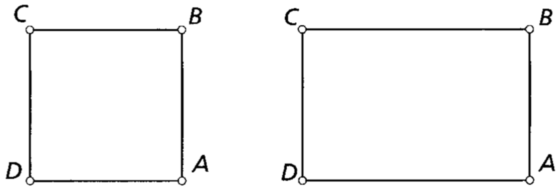
Propiedades

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero vale 360º.

Clasificación

Paralelogramos: tienen sus lados paralelos dos a dos. A su vez se clasifican en:

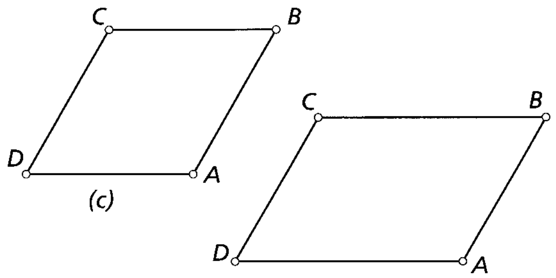
- *Cuadrado (a)*: los cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos miden 90º. Las diagonales son iguales y perpe*ndiculares entre sí; se cortan en su punto medio.*



(a) (b)

- *Rectángulo* (b): los lados opuestos son iguales entre sí y los cuatro ángulos miden 90°. Las diagonales son oblicuas y de igual tamaño; se cortan en su punto medio.

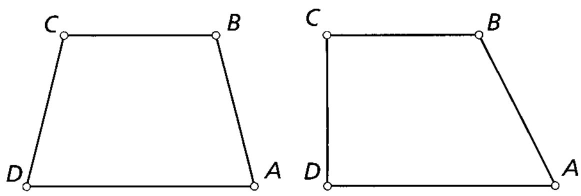
- *Rombo (c)*: los cuatro lados son iguales y los ángulos opuestos miden lo mismo. Las diagonales son perpendiculares pero de distinto tamaño; se cortan en su punto medio.



(d)

- *Romboide (d)*: los lados y ángulos opuestos son iguales entre sí. Las diagonales son desiguales y oblicuas; se cortan en su punto medio.

Trapecios: tienen solo dos lados paralelos, que reciben el nombre de bases. Pueden ser:

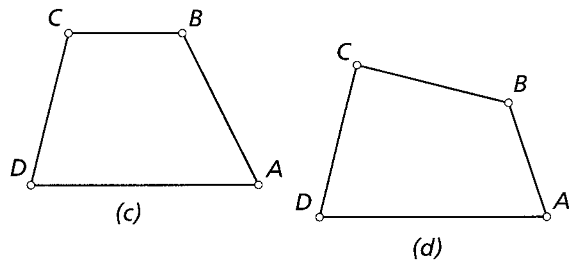


(a) (b)

- *Isósceles* (a): Los lados que no son las bases son iguales; también tiene los ángulos iguales dos a dos. Tiene un eje de simetría.

- *Rectángulo* (b): tiene un ángulo recto, coincidiendo la altura con uno de sus lados.

- *Escaleno* (c): no tiene ninguna característica de los dos anteriores.

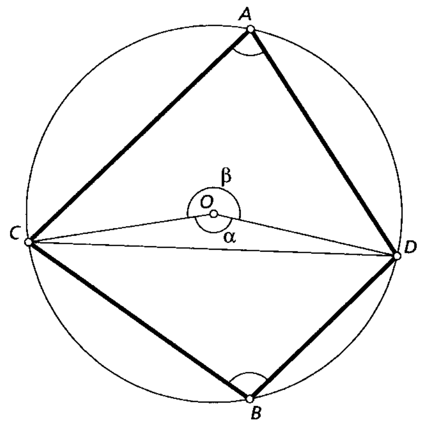


Trapezoides (d): cuadriláteros que tienen todos sus lados y ángulos distintos.

2. RELACIONES NOTABLES

2.1. CUADRILÁTERO INSCRIBIBLE

Se llama así al cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia.
En un cuadrilátero inscribible sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman 180°.
Recíprocamente, un cuadrilátero que tenga sus ángulos opuestos suplementarios es inscribible.



$$A + B = C + D = 180°$$

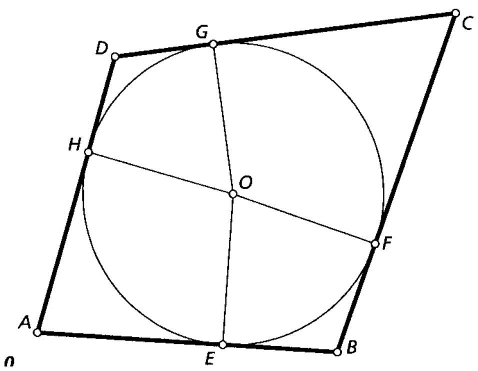
Teniendo en cuenta que el valor de un ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco:

$$A + B = \alpha / 2 = \beta /2 = (\alpha + \beta) / 2 = 360º / 2 = 180º$$

2.2. CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIBIBLE

Se denomina así al cuadrilátero en el que se puede inscribir una circunferencia. En un cuadrilátero circunscribible la suma de los lados opuestos vale lo mismo.

Recíprocamente, un cuadrilátero cuya suma de lados opuestos valga lo mismo es circunscribible.

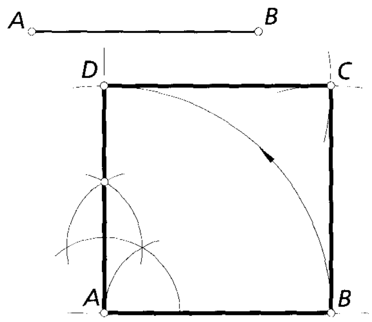


$$A + C = B + D$$

Teniendo en cuenta que si trazamos desde un punto exterior las tangentes a una circunferencia, las distancias desde el punto exterior a los puntos de tangencia valen lo mismo, es fácil demostrar la igualdad anterior.

3. CONSTRUCCIÓN

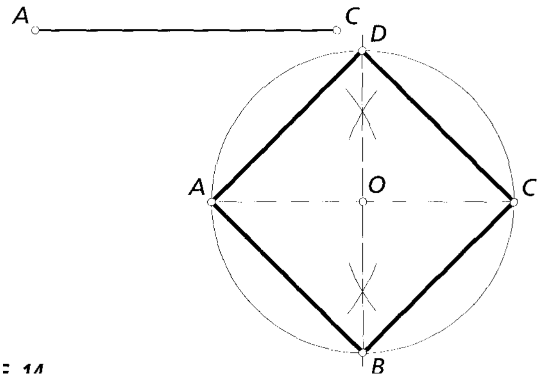
3.1. CONSTRUIR UN CUADRADO CONOCIENDO EL LADO



Sea *AB* el lado:

1. Sobre un segmento *AB* igual al lado se traza la perpendicular por uno de sus extremos *A*.
2. Sobre la perpendicular trazada, con radio igual al lado *AB* y centro en *A*, se transporta la magnitud *AD* del lado.
3. Con centro en *B* y *D,* y radio *AB*, se describen sendos arcos que se cortan en el cuarto vértice *C*.

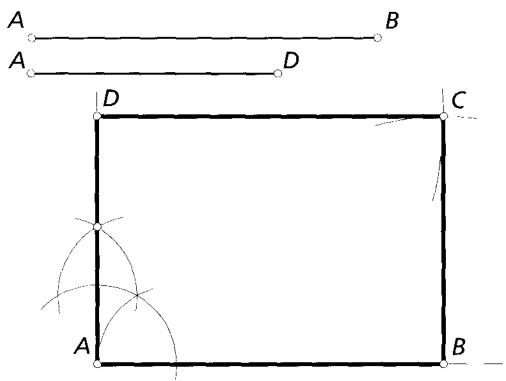
3.2. CONSTRUIR UN CUADRADO CONOCIENDO LA DIAGONAL



Sea *AC* la diagonal:

1. Con la diagonal *AC* como diámetro, se dibuja la circunferencia de centro *O*.
2. Se traza la mediatriz del segmento *AC*, que corta a la circunferencia en *B* y *D.*

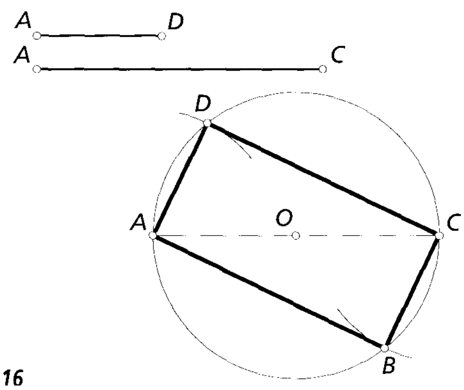
3.3. CONSTRUIR UN RECTÁNGULO CON DO SUS LADOS



Sean *AB* y *AD* los lados:

1. Por el extremo de un lado *AB* se traza la perpendicular al mismo, y sobre esta se traslada la magnitud del otro lado *AD*.
2. Con centro en el vértice *B* y radio igual al lado *AD* se traza un arco.
3. Con centro en el vértice *D* y radio igual al lado *AB* se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto *C*, cuarto vértice del rectángulo.

3.4. CONSTRUIR UN RECTANGULO CONOCIENDO UN LADO Y LA DIAGONAL



Sean *AD* el lado y *AC* la diagonal:

1. Con la diagonal *AC* como diámetro se dibuja la circunferencia de centro *O*.
2. Haciendo centro en los puntos *A* y *C* y con radio igual al lado conocido se

trazan dos arcos de circunferencia en sentido contrario hasta cortar a la circunferencia en los puntos *B* y *D.*

3.5. CONSTRUIR UN ROMBO CONOCIENDO EL LADO Y UNA DIAGONAL

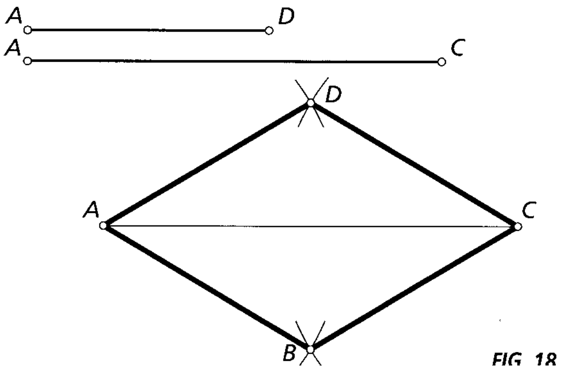


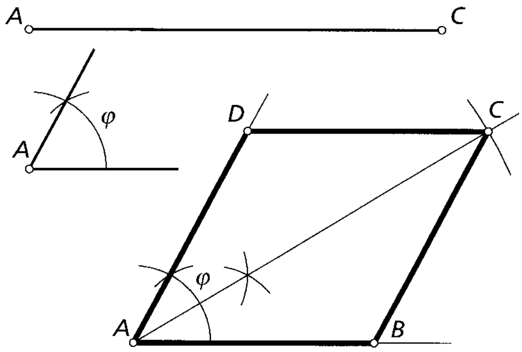
FIG 18

Sea AD el lado y AC la diagonal:

1. Con centros en los extremos *A* y *C* de la diagonal y radio igual al lado se describen cuatro arcos, que se cortan en los puntos *B* y *D*.
2. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices del rombo.

3.6. CONSTRUIR UN ROMBO CONOCIENDO UN ÁNGULO Y SU DIAGONAL

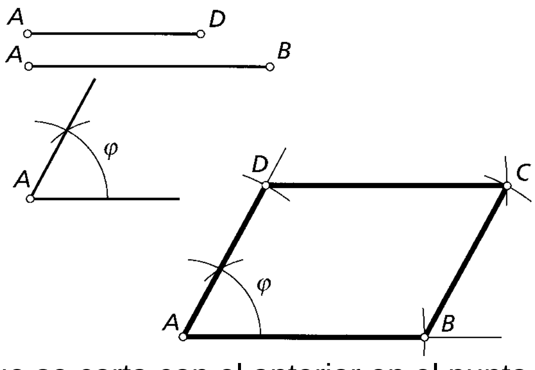
Sean *AC* la diagonal y φ el ángulo:



1. Se dibuja el ángulo φ conocido, de vértice *A*, trazando la bisectriz del mismo.
2. A partir del punto *A* y sobre la bisectriz se lleva la magnitud *AC* de la diagonal conocida.
3. Por el punto *C* se trazan las paralelas a los lados del ángulo que se cortarán con estos en los puntos *B* y *D*, determinando los otros dos vértices del rombo.

3.7. CONSTRUIR UN ROMBOIDE CONOCIENDO SUS LADOS Y UN ÁNGULO

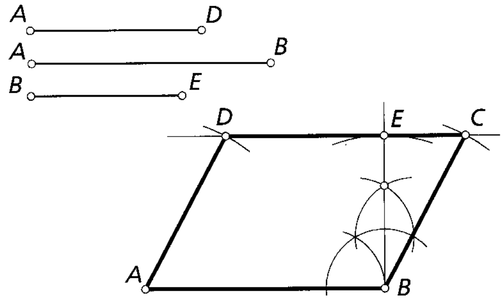
Sean *AD* y *AB* los lados y φ el ángulo:



1. Se dibuja el ángulo φ conocido, de vértice *A*, transportando sobre cada lado las longitudes *AB* y *AD* iguales a los lados del romboide conocidos.
2. Desde el punto *B* y con radio *AD* se traza un arco; y desde el punto *D* y radio *AB* se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto *C*.

3.8. CONSTRUIR UN ROMBOIDE CONOCIENDO SUS LADOS Y LA ALTURA

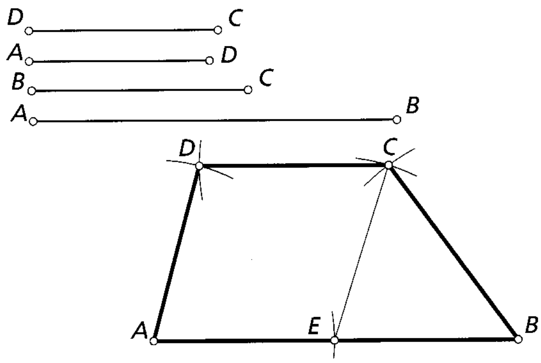
Sean *AD* y *AB* los lados y *BE* la altura:



1. Se dibuja un segmento *AB* igual a uno de los lados conocidos.
2. Por el punto *B* se traza la perpendicular al mismo, transportando a partir de *B* la distancia *BE* igual a la altura.
3. Por el punto Ese traza la recta paralela al segmento *AB*.
4. Con centro en los puntos *A* y *B* y radio igual al otro lado conocido se trazan sendos arcos que cortan a la paralela trazada por *E* en los puntos *C* y *D*.

3.9. CONSTRUIR UN TRAPECIO ESCALENO CONOCIENDO LOS CUATRO LADOS

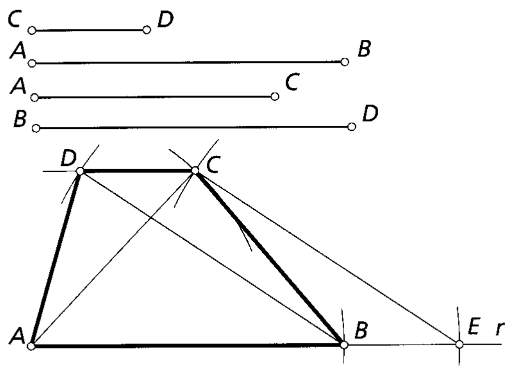
Sean *DC*, *AD*, *BC* y *AB* los cuatro lados, donde *B* y *CD* son las bases:



1. Se dibuja un segmento *AB* igual a uno de los lados conocidos.
2. A partir del punto *A* y sobre dicho segmento se traslada el segmento *AE* = *CD*.
3. Con centro en *E* y radio igual a uno de los lados laterales se describe un arco; con centro en el punto *B* y radio igual al otro lado lateral se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto *C*.
4. Con centro en *A* y radio *EC* y con centro en *C* y radio *AE* se describen dos arcos que se cortan en el cuarto vértice *D*.

3.10. CONSTRUIR UN TRAPECIO ESCALENO CONOCIENDO SUS BASES Y SUS DIAGONALES

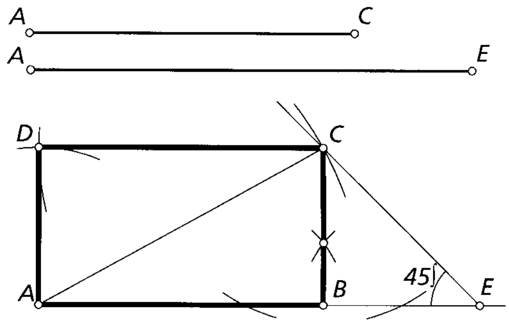
Sean *AB* y *CD* las bases y *AC* y *BD* las diagonales:



1. Sobre una recta *r* cualquiera y a partir de un punto *A* se lleva el segmento *AB* igual a una de las bases. A partir del punto *B* se suma el segmento *BE* igual a la otra base.
2. Con centro en *A* y radio igual a una de las diagonales se traza un arco, y con centro en *E* y radio igual a la otra diagonal se traza otro arco que se corta con el anterior en el punto *C*.
3. La intersección de la recta paralela a *AE* trazada por el punto *C* con el arco de centro *B* y radio *EC* es el vértice *D*.

3.11. CONSTRUIR UN RECTÁNGULO CONOCIENDO LA SUMA DE LOS LADOS Y LA DIAGONAL

Sea *AE* un segmento igual a la suma de los lados y *AC* la diagonal:

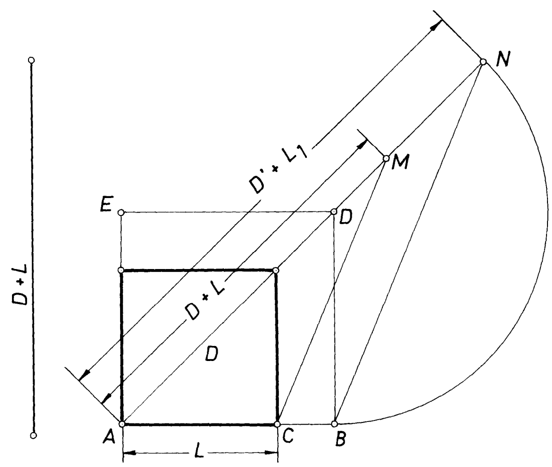


1. Por el punto *E*, uno de los extremos del segmento *AE*, se traza la recta que forma *45º* con dicho segmento.
2. Con centro en el otro extremo *A* y radio igual a la diagonal dada se traza un arco que corta a la recta anterior en el punto *C*.
3. Por el punto *C* se traza la perpendicular al segmento *AE*, que lo corta en el punto *B*.
4. Con centros en *A* y *C* y radios igual a *CB* y *AB*, respectivamente, se trazan dos arcos que se cortan en el punto *D*. Los puntos *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices del rectángulo.

3.12, CONSTRUIR UN CUADRADO CONOCIENDO LA SUMA DE LA DIAGONAL MÁS EL LADO d+l.

Primer procedimiento:

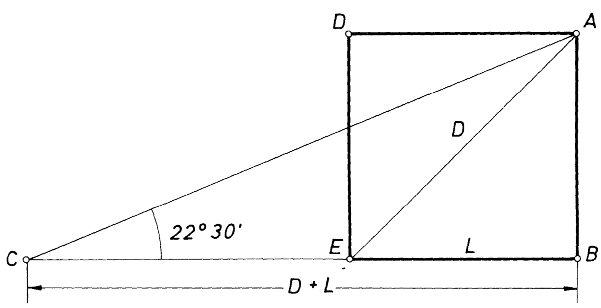
Este problema se resuelve por semejanza con otro cuadrado auxiliar.



1. Se construye un cuadrado cualquiera de lado L_1=*AB* y sobre la diagonal se toma el segmento *D' +* L_1*.*
2. Se une el punto *N* con *B* y se toma sobre la citada diagonal el segmento conocido D+*L* a partir del vértice *A;*
3. Por el extremo M se traza la paralela a *NB,* obteniendo el punto *C* en *AB.*
4. El segmento *AC* es el lado *L* del cuadrado pedido que tiene *AM* = *D*+*L.*

Segundo procedimiento:

Se sitúa el dato *D*+*L* y en su extremo B se traza la perpendicular a él.



1. En el otro extremo C se construye un ángulo de 22 ° 30' (cuarta parte de 90 ^{0}) hasta que corte en *A* a la perpendicular anterior.
2. El segmento *AB* es el lado del cuadrado pedido.

De forma similar se construye un cuadrado conociendo la *D-L.*

POLÍGONOS

1. POLÍGONOS REGULARES

1.1. DEFINICIÓN, PROPIEDADES Y CLASIFICACIÓN

Definición

Polígono es el espacio limitado por una línea quebrada, cerrada y plana. Cada segmento de la
línea quebrada se denomina lado, y los puntos de intersección de los lados se llaman *vértices*.

Si todos los lados son iguales, el polígono se llama *equilátero*; si los ángulos son iguales, se llama *equiángulo*; si los lados y ángulos son iguales, el polígono se llama *regular*; en caso contrario se denominan polígonos *irregulares*. En el presente tema nos referiremos siempre a los polígonos regulares.

Un polígono es *cóncavo* si al trazar cualquier recta solo lo corta en dos puntos. El polígono es *convexo* si existe alguna recta que lo corte en mas de dos puntos.

Se dice que un polígono está *inscrito* en una circunferencia si todos sus vértices están en ella.
El polígono está *circunscrito* si todos sus lados son tangentes a la circunferencia.

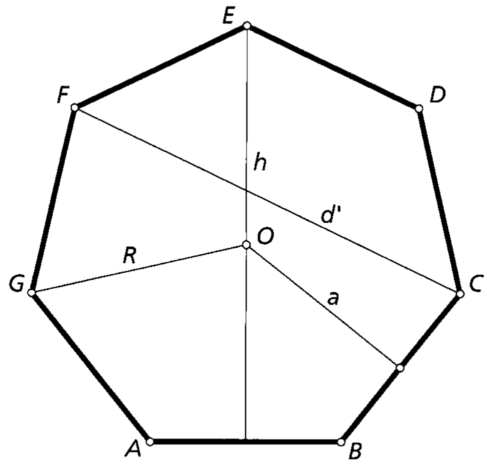
Propiedades

a) La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual a 180° por el número de lados menos dos: $\varphi = 180(n-2)$.
b) La suma de los ángulos externos de un polígono es igual a 360º.
c) El número de diagonales de un polígono de *n* lados es: *nº = n(n-3)/2*.

Clasificación	**nº de lados**
• Triángulo:	3
• Cuadrilátero:	4
• Pentágono:	5
• Hexágono:	6
• Heptágono:	7
• Octógono:	8
• Eneágono:	9
• Decágono:	10
• Undecágono:	11
• Dodecágono:	12
• Pentadecágono:	15

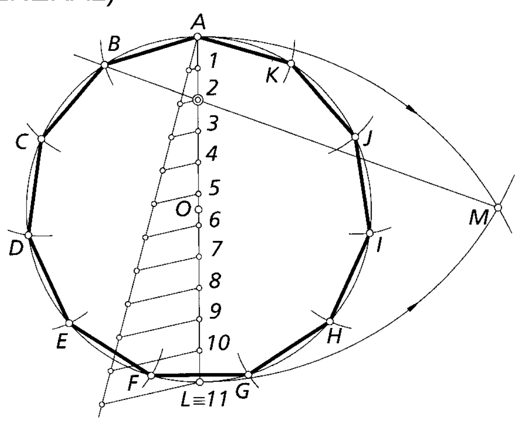
El triángulo regular se llama triángulo equilátero, y el cuadrilátero regular, cuadrado.
El resto de los polígonos se nombran indicando el número de lados que tienen; así, un polígono que tenga el doble de lados que un *eneágono (9 lados)* se llama *polígono de dieciocho lados*.

Líneas notables



Radio: es el segmento *R* que va desde el centro a un vértice cualquiera.
Apotema: es el segmento *a* que une el centro con el punto medio de uno de sus lados.
Altura: es el segmento *h* perpendicular a uno de los lados trazada desde el vértice opuesto.
Diagonal: es el segmento *d* que une dos vértices cualesquiera no consecutivos.
Diagonal principal: en los polígonos de un número par de lados, es el segmento *d* que une dos vértices opuestos.
Perímetro: es la suma de las longitudes de todos los lados de un polígono.

1.2. DIVISIÓN APROXIMADA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN UN NÚMERO CUALQUIERA DE PARTES IGUALES (MÉTODO GENERAL)

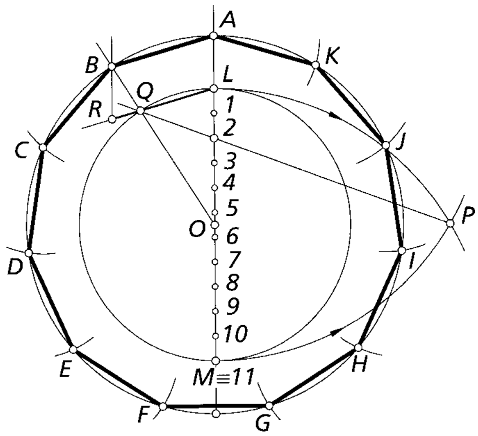


Dada la circunferencia de centro *O*:

1. Se divide un diámetro *AL* de la circunferencia en el mismo número de partes iguales en que se desea dividir la circunferencia, numerando dichas divisiones. En este caso, en 11 partes.
2. Con centros en los extremos *A* y *L* del diámetro anterior y radio igual al diámetro se trazan dos arcos que se cortan en el punto *M*.
3. El punto *M* se une con el punto número *2* del diámetro, prolongando dicha recta hasta que corte a la circunferencia en el punto *B*. El segmento *AB* es el lado aproximado del polígono que se busca.

1.3. CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO DE UN NÚMERO CUALQUIERA DE LADOS CONOCIENDO EL LADO (MÉTODO GENERAL)

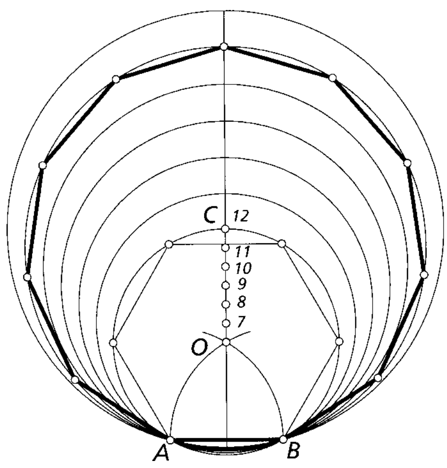
Primer método



1. Con centro en un punto *O* cualquiera se traza una circunferencia de radio arbitrario.
2. Se toma un diámetro *LM* cualquiera y se divide en tantas partes como lados tenga el polígono que se desea construir, numerando dichos puntos *1, 2, ...*
3. Con centros en *L* y *M* y radio *LM* se trazan dos arcos que se cortan en *P.*
4. Se une el punto *P* con el punto *2*; la

prolongación de dicha recta corta a la circunferencia en *Q*.

5. Se prolonga el segmento *LQ* y a partir del punto *L* se lleva la distancia *LR*, igual al lado del polígono que se desea construir.
6. Por el punto *R* se traza la paralela al radio *OL* que corta a la prolongación del radio *OQ* en el punto *B*.
7. La distancia *OB* es el radio de la circunferencia que inscribe al polígono que se pide.



Segundo método

1. Con radio *AB* y centros en *A* y en *B* se trazan dos arcos que se cortan en el punto 0 de la mediatriz. El punto *O* es el centro del hexágono de lado *AB*.
2. Con centro en el punto *O* y radio *OA* se dibuja la circunferencia que corta a la mediatriz de *AB* en el punto *C*.
3. Se divide el radio *OC* en seis partes iguales, siendo los puntos *7, 8*, ... y *12* los centros de las circunferencias circunscritas a los polígonos de *7, 8*, ... y *12* lados, respectivamente.

2. CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES DADO EL RADIO

2.1 DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 3, 6, 12, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro *O*:

1. Se traza un diámetro *AG* cualquiera.
2. *Hexágono*. Con radio igual al radio de la circunferencia dada y con centros en *A* y *G* se trazan dos arcos hasta cortar a la circunferencia en los puntos *K, I, C* y *E*, vértices del hexágono.
3. *Triángulo*. El triángulo equilátero se hallará uniendo los vértices del hexágono de dos en dos.
4. *Dodecágono*. Trazando desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del hexágono, estas cortarán a la circunferencia en seis puntos que junto con los vértices del hexágono formarán el gono de doce lados.

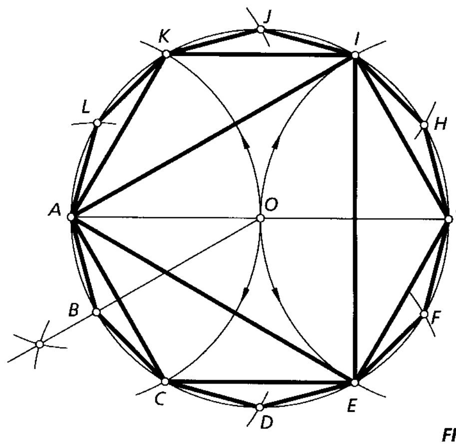
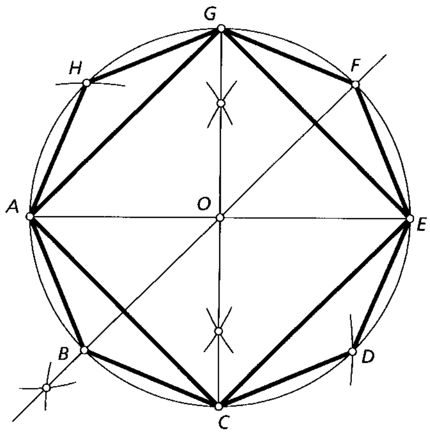


FIG. 1

2.2. DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 4, 8, 16, ... PARTES IGUALES

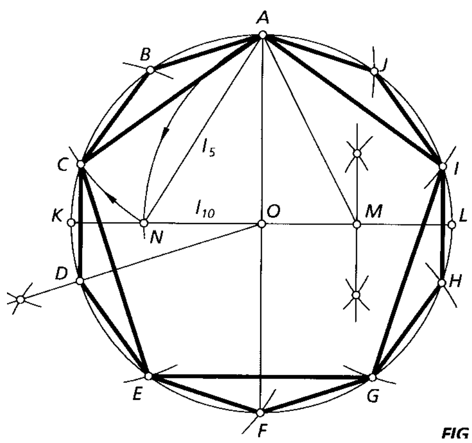
Sea la circunferencia de centro *O*:



1. *Cuadrado*. Se trazan dos diámetros *AE* y *CG* perpendiculares entre sí, que dividen a la circunferencia en cuatro partes iguales.
2. *Octágono*. Trazando desde el centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del cuadrado, estas cortarán a la circunferencia en cuatro puntos que junto con los vértices del cuadrado formarán el polígono de ocho lados.
3. *Polígono de 16 lados*. Al trazar nuevas perpendiculares a los lados del octógono se obtiene la división de la circunferencia en dieciséis partes iguales.

2.3. DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 5, 10, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro *O*:

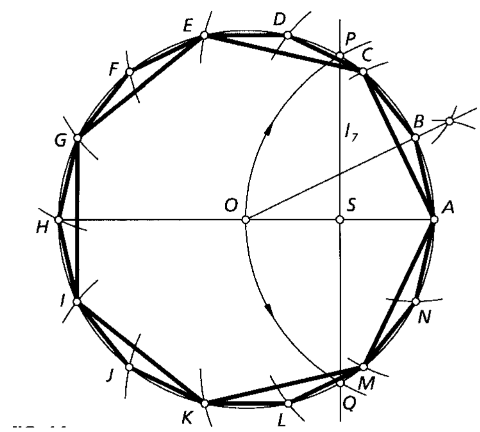


FIG

1. Se dibujan dos diámetros *KL* y *AF*, perpendiculares entre sí.
2. Se divide el radio *OL* en dos partes iguales mediante el trazado de la mediatriz, hallando así el punto *M*.
3. Con centro en *M* se describe un arco de radio MA hasta cortar al diámetro KL en el punto *N*.
4. *Pentágono.* El segmento *AN* es el lado l_5 del pentágono inscrito.
5. *Decágono*. El segmento ON es el lado l_{10} del decágono regular.

2.4. DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 7, 14, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro *O*:



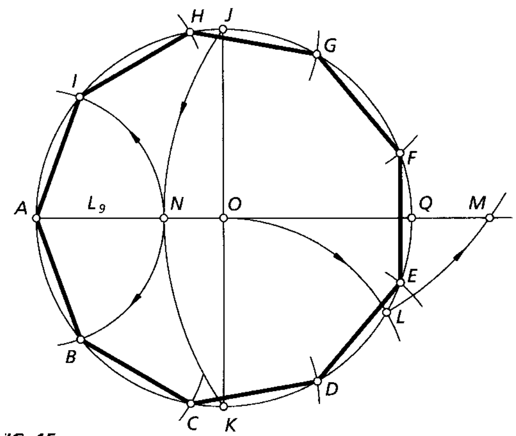
1. Se traza un diámetro cualquiera *HA*.
2. *Heptágono*. Se traza la mediatriz del radio *OA* que cortará a la circunferencia en los puntos *P* y *Q*, siendo *S* el punto medio de *OA*. El segmento *PS* es el lado *l*, del heptágono.
3. *Polígono de 14 lados*. Trazando desde el centro de la circunferencia las per-

pendiculares a los lados del heptágono, estas cortarán a la circunferencia en siete puntos, que junto con los vértices del heptágono formarán el polígono de catorce lados.

2.5. DIVISIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA EN 9, 18, ... PARTES IGUALES

Sea la circunferencia de centro *O*:

1. Se trazan dos diámetros *AQ* y *JK*, perpendiculares entre sí.
2. Desde un extremo *K* de uno de los diámetros se traza un arco con el mismo radio de la circunferencia, cortando a esta en el punto *L*.
3. Con centro en el otro extremo *J* del mismo diámetro, y radio *JL*, se traza un arco que corta a la prolongación del otro diámetro en el punto *M*.
4. Con centro en *M* y radio *MJ* se traza un nuevo arco que corta al radio *OA* en el punto *N*.
5. *Eneágono*. El segmento *AN* es el lado l_9 del polígono de nueve lados.
6. *Polígono de 18 lados*. Trazando des centro de la circunferencia las perpendiculares a los lados del eneagono, estas cortarán a la circunferencia en nueve puntos que, junto con los vértices del eneágono, formarán el polígono de dieciocho lados.

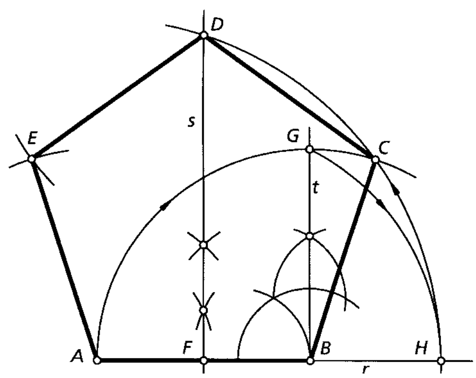


3. CONSTRUCCION DE POLÍGONOS REGULARES DADO EL LADO

3.1 CONSTRUCCIÓN DE UN PENTÁGONO

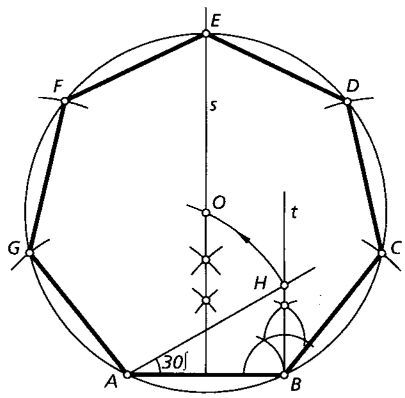
Dado el segmento *AB*:

1. Se prolonga el lado *AB*; se dibuja la mediatriz s del segmento *AB*, cuyo punto medio es F, y se traza la perpendicular tal lado *AB*, por uno de los extremos.
2. Se traza un arco con centro en *B* y radio *BA* hasta cortar en *G* a la perpendicular *t* trazada por *B*.
3. Se traza un segundo arco con centro en *F* y radio *FG* hasta cortar en *H* a la prolongación del lado *AB*.
4. Se traza un tercer arco con centro en *A* y radio *AH* hasta cortar al primer arco en *C* y a la mediatriz s en *D*, vértices ambos del pentágono.
5. Con centros en *A* y *D* y radio *AB* se trazan dos arcos que se cortarán en *E*.



3.2 CONSTRUCCIÓN DE UN HEPTÁGONO

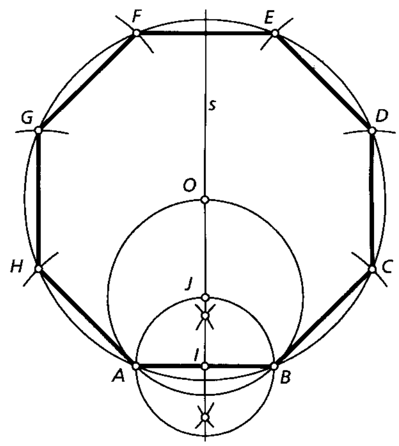
Dado el segmento AB:



Se trazan la mediatriz s del segmento *AB* y la perpendicular *t*, por el extremo *B*, al lado *AB*.

1. Con vértice en *A*, se construye un ángulo de *30º*, cuyo lado corta en *H* a la perpendicular *t*.
2. Desde *A* y con radio *AH* se describe un arco que corta a la mediatriz *s* en *O* centro de la circunferencia que inscribe al polígono.

3.3. CONSTRUCCIÓN DE UN OCTÓGONO

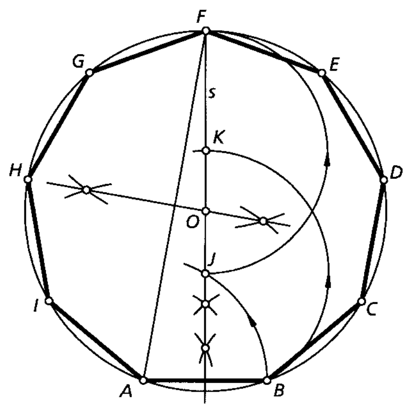


Dado el segmento *AB*:

1. Se traza la mediatriz *s*, cuyo punto medio es *I*.
2. Se dibuja una circunferencia con centro en *I* y diámetro *AB*, que corta a la mediatriz n el punto *J.*
3. Con centro en *J* y radio *JA*, o *JB*, se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto *O*, centro de la circunferencia que inscribe al octógono de lado *AB*.

3.4 CONSTRUCCIÓN DE UN ENEÁGONO

Dado el segmento *AB*:



1. Se traza la mediatriz s del segmento *AB*.
2. Con centro en *A* y radio *AB* se traza un arco que corta a la mediatriz en *J*.
3. Con centro en *J* y radio *JB* se traza un arco que corta a la mediatriz en *K*.
4. Con centro en *K* y radio *KJ* se traza un arco que corta a s en el punto *F*, vértice opuesto al lado *AB*.
5. La mediatriz de *AF* corta a la recta s en el punto *O*, centro de la circunferencia.

4. POLÍGONOS ESTRELLADOS

4.1. DEFINICIÓN

Un polígono regular estrellado de un número determinado de vértices se halla dividiendo la circunferencia en tantas partes como vértices tenga el polígono a construir, y uniendo dichos vértices de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc. Para unir los vértices se ha de partir de uno de ellos y, recorriendo todos y cada uno de los vértices, cerrar el polígono en el mismo vértice que se comenzó.

El número de polígonos estrellados que existen de un número v de vértices es igual al número de cifras primas con *v* (números que no tienen división exacta con *v*) que sean menores de *v/2* y dichos polígonos se hallan uniendo los vértices de la manera que nos indican las cifras primas.

El siguiente cuadro indica el número de polígonos estrellados que existen de un número determinado de vértices, así como la manera de unirlos:

siendo:

v Número de vértices del polígono estrellado.
p Número de polígonos estrellados de v vértices.
n Números primos con v menores de la mitad, que indican además la forma de unir los vértices.

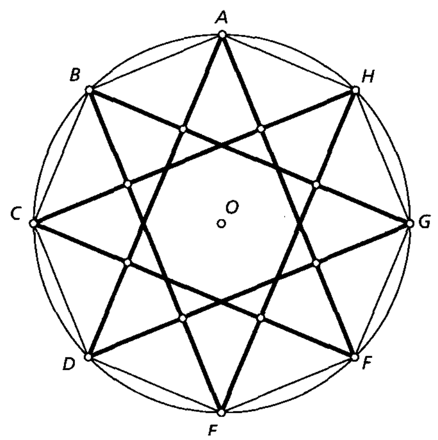
v	p	n
5	1	2
6	0	-
7	2	2-3
8	1	3
9	2	2-4
10	2	3-4

v	p	n
11	4	2-3-4-5
12	1	5
13	5	2-3-4-5-6
14	4	3-4-5-6
15	4	2-4-6-7
...	...	...

4.2. CONSTRUCCIÓN DE UN OCTÓGONO REGULAR ESTRELLADO

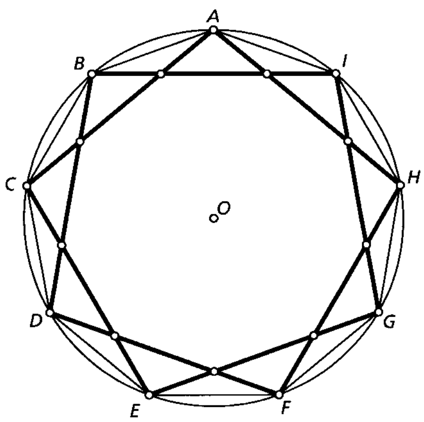
Tal como se indica en la tabla anterior, solo existe un polígono estrellado de ocho vértices, ya que solo hay un número menor que *4 (8/2)*, que sea primo con *8*.

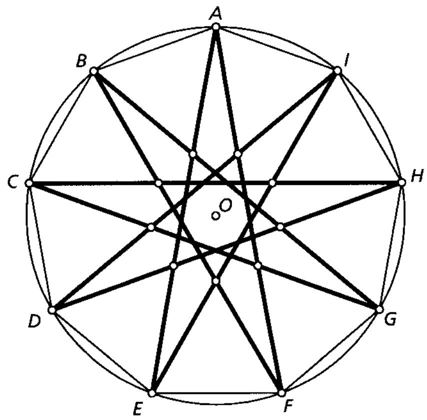
El polígono estrellado se halla dividiendo la circunferencia en ocho partes iguales y uniendo los vértices de tres en tres, puesto que el número primo con *8* es el *3*.



4.3. CONSTRUCCIÓN DE UN ENEÁGONO RE GULAR ESTRELLADO

Tal como se indica en el cuadro existen dos polígonos estrellados de nueve vértices, puesto que hay dos números, menores de *4,5 (9/2*), que sean primos con *9*.





Los dos polígonos estrellados se trazan, una vez dividida la circunferencia en nueve partes iguales, uniendo los vértices de dos en dos y de cuatro en cuatro, puesto que los números primos con *9* son el *2* y el *4*.

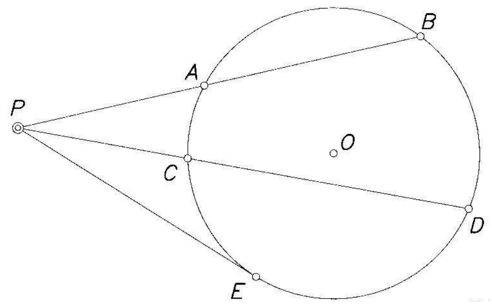
Si se intentan unir los vértices de tres en tres nos encontraremos con tres triángulos equiláteros, girados uno respecto del otro, pero que no forman un polígono regular estrellado por no cumplir con el requisito de todo polígono estrellado: que al unir los vértices y recorrerlos todos y cada uno, el polígono debe cerrar en el mismo vértice en que se comenzó.

POTENCIA, POLARIDAD Y RECTIFICACIÓN

1. POTENCIA

1.1. POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Sean un punto *P,* una circunferencia de centro *O* y una recta trazada por *P* que corta a la circunferencia en los puntos *A* y *B*; se denomina potencia *p* del punto *P* respecto a la circunferencia *O*, al producto de las distancias *PA* y *PB.*



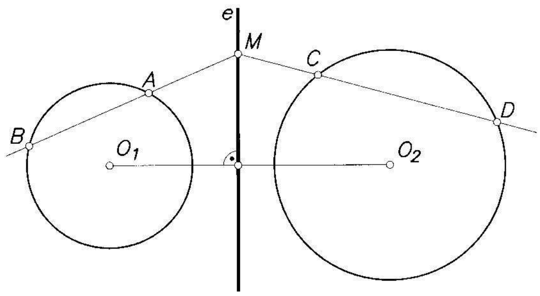
Si por el punto *P* trazamos cualquier otra recta secante o tangente a la circunferencia, se cumple:

$$p = PA \times PB = PC \times PD = PE \times PE = (PE)^2 = \text{cte}$$

Si el punto *P* es interior a la circunferencia, la potencia es negativa .

1.2. EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Dadas dos circunferencias de centros O_1 y O_2 , se llama eje radical al lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma potencia respecto de ambas circunferencias:

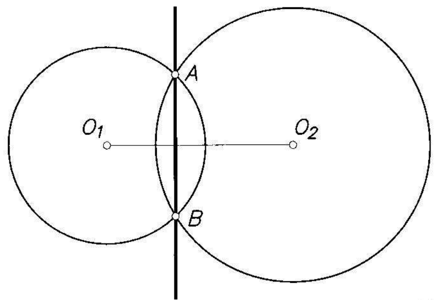


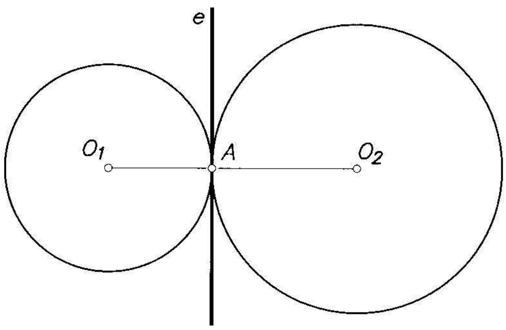
$$MA \times MB = MC \times MD$$

El eje radical es siempre perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias.

Eje radical de dos circunferencias secantes

Se halla uniendo los puntos de intersección *A* y *B* de ambas circunferencias.



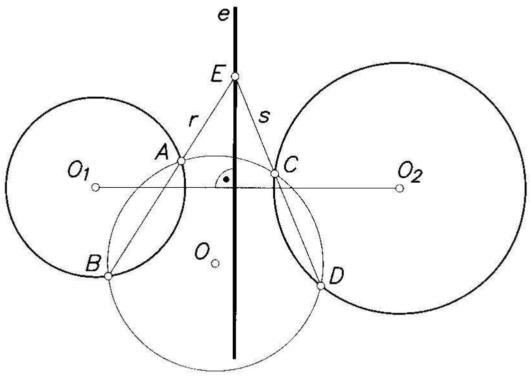


Eje radical de dos circunferencias tangentes

Se halla trazando la recta tangente común a ambas circunferencias.

Eje radical de dos circunferencias exteriores

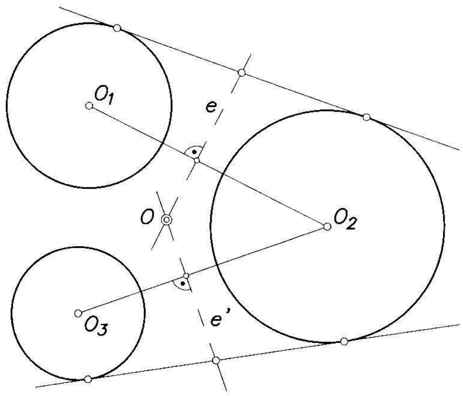
El eje se determina trazando una circunferencia auxiliar de centro *O*, hallando los ejes radícales *r* y s de ésta con las de centro O_1 y O_2, y trazando por último la recta *e* que pasa por el punto *E* de intersección y es perpendicular a la recta O_1O_2, que une los centros dados.



1.3. CENTRO RADICAL DE TRES CIRCUNFERENCIAS

Dadas tres circunferencias de centros O_1, O_2 y O_3, se llama centro radical al punto *O* que tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias.

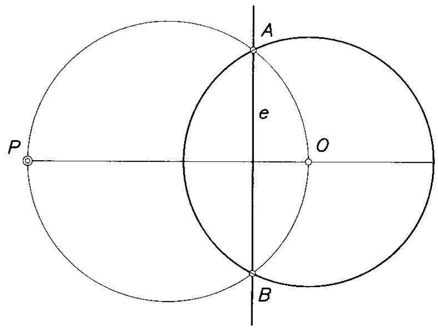
El centro radical será el punto de intersección de los ejes radícales de las circunferencias tomadas
de dos en dos.



2. POLARIDAD

2.1. POLAR DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Polar *e* de un punto fijo *P,* llamado *polo,* respecto de una circunferencia de centro *O*, llamada *círculo director*, es el eje radical de dos circunferencias, la del círculo director y la de diámetro *OP.*

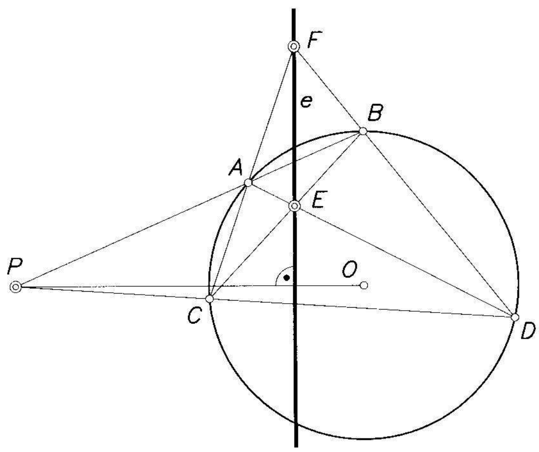


2.2. HALLAR LA POLAR, CONOCIENDO EL CÍRCULO DIRECTOR Y EL POLO

El polo es exterior

Dado el círculo de centro *O* y el polo *P*:

1. Se trazan dos rectas secantes al círculo que pasen por el polo; una lo corta en *A* y *B* y la otra en *C* y *D*.
2. Las diagonales *AD* y *BC* del cuadrilátero que se forma se cortan en el punto *E,* y los lados *AC* y

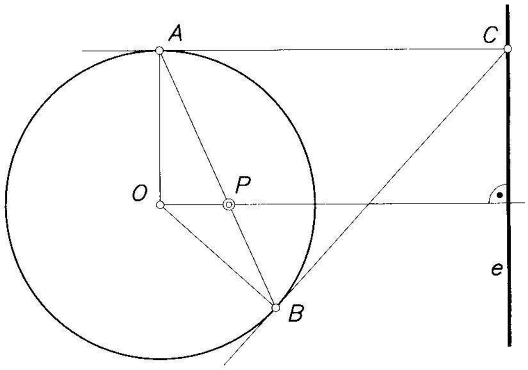


BD se cortan en el punto *F.*

3. La recta que une los puntos *E* y *F* determina la polar e. Otro procedimiento, derivado de la propia definición dada anteriormente, consiste en trazar la recta que une los puntos *A* y *B* de intersección del círculo director con la circunferencia de diámetro *OP.*

El polo es interior

Dado el círculo de centro *O* y el polo *P*:



1. Se traza una recta secante cualquiera que corta al círculo director en los puntos *A* y *B*.

2. Por los puntos *A* y *P* se trazan las tangentes al círculo director, es decir, por *A* y *B* se trazan las rectas perpendiculares a los radios *OA* y *OB*.

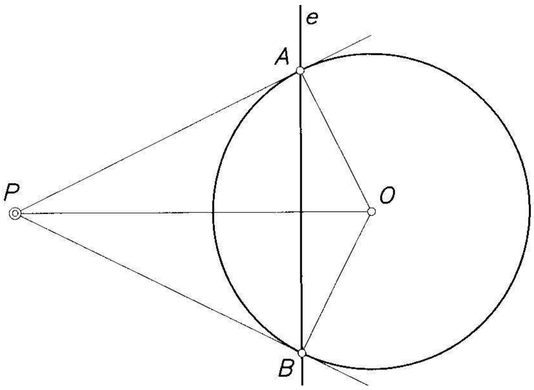
3. Por el punto *C* de intersección de las tangentes anteriores se dibuja la recta e perpendicular a la recta *OP.* La recta *e* es la polar buscada.

El polo está en la circunferencia

En el supuesto de que *P* se encuentre en la circunferencia, la polar es la tangente en dicho punto.

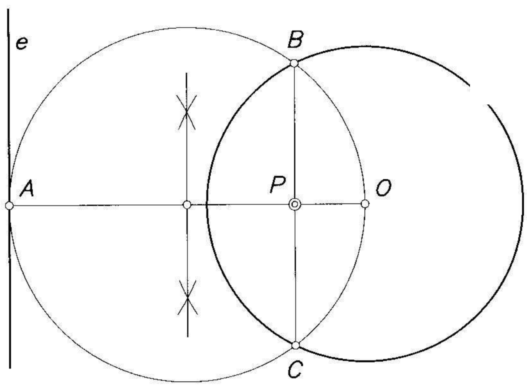
2.3. HALLAR EL POLO, CONOCIENDO EL CÍRCULO DIRECTOR Y LA POLAR

La polar es secante



Dado el círculo director de centro *O* y la polar *e*:

1. Los puntos *A* y *B*, de intersección de la polar e con el círculo director, se unen con el centro O.
2. Por los puntos *A* y 8 se trazan las rectas perpendiculares a los radios *OA* y *OB* respectivamente, que se cortan en el punto *P*, polo buscado.



La polar es exterior

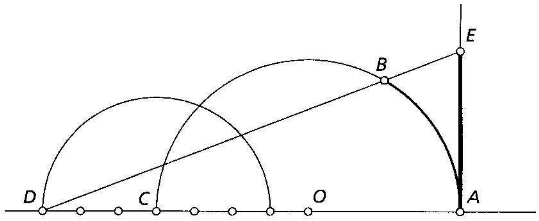
Dado el círculo director de centro *O* y la polar *e*:

1. Por el centro *O* se traza la recta *OA* perpendicular a la polar *e*.
2. Se describe la circunferencia de diámetro *OA,* que corta al círculo director en los puntos *B* y *C*.
3. El punto *P* de intersección de la recta *BC* y la recta *OA* nos determina el polo buscado.

3. RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA

3.1. RECTIFICACION DE UN ARCO MENOR DE 90º

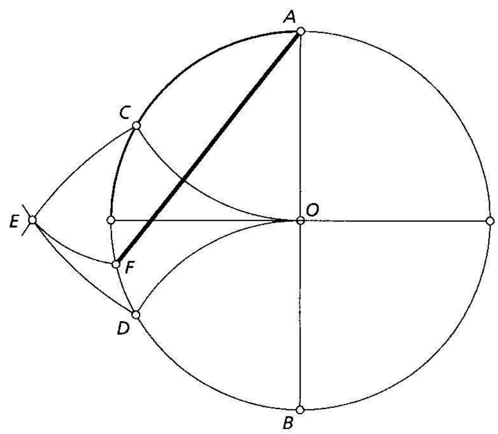
Rectificar un arco de circunferencia es hallar el segmento recto cuya longitud sea igual a la del arco dado.
Sea el arco *AB* de centro *O*:



1. Por el punto *A,* uno de los extremos del arco, se traza el diámetro *AC* y la recta *r* tangente al arco.
2. Se divide el radio *OC* en cuatro partes iguales, y haciendo centro en el punto *C* y tomando como radio tres de esas cuatro partes, se describe un arco hasta cortar a la prolongación del diámetro en el punto *D.*
3. Se une el punto *D* con el otro extremo *B* del arco hasta cortar a la recta tangente *r* en el punto *E.* El segmento *AE* es la rectificación del arco *AB.*

3.2 RECTIFICACION DE UN ARCO DE 90º

Sea la circunferencia de centro *O*:

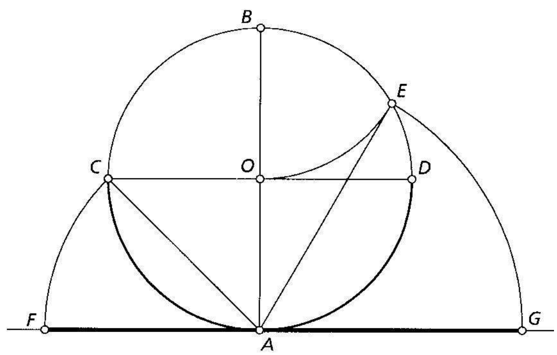


1. Con centros en los extremos *A* y *B* de un diámetro se describen dos arcos del mismo radio que la circunferencia hasta cortar a esta en *C* y *D*.
2. Con centro en *A* y radio *AD,* y centro en *B* y radio *BC,* se trazan dos arcos que se cortan en *E.*
3. Por último, con centro en *C* y radio *CE* se describe otro arco que corta a la circunferencia en *F.* El segmento *AF* es la rectificación del arco de 90°.

También podría haberse aplicado el procedimiento del caso anterior.

3.3 RECTIFICACIÓN DE UNA SEMICIRCUNFERENCIA

Sea la circunferencia de centro *O*:



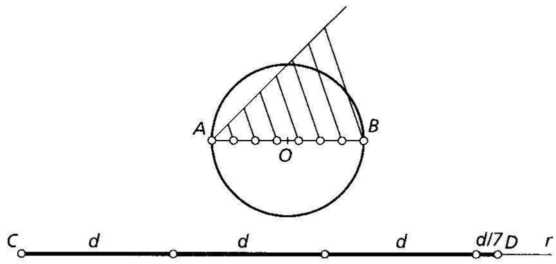
1. Se trazan dos diámetros *AB* y

CD perpendiculares entre sí, y con centro en *B* y radio *BO* se dibuja un arco que corta a la circunferencia en el punto *E*.

2. Con centro en *A* y radio *AC* (lado del cuadrado inscrito) y con centro en *A* y radio *AE* (lado del triángulo inscrito), se trazan dos arcos que cortan a la recta tangente a la circunferencia en el punto *A,* en *F* y *G*. El segmento *FG* es la rectificación buscada.

3.4 RECTIFICACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

La longitud de una circunferencia es aproximadamente igual a tres veces el diámetro más una séptima parte del mismo; por tanto, dada la circunferencia de centro *O*:

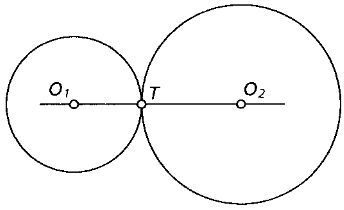


1. Se traza un diámetro cualquiera *AB* y se divide en siete partes iguales.
2. Sobre una recta *r* ya partir de un punto *C*, se lleva tres veces el diámetro más una de las siete partes en que se ha dividido. El segmento *CD* total es la rectificación de la circunferencia.

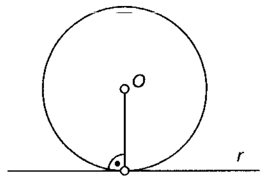
TANGENCIAS Y ENLACES

1. INTRODUCCION

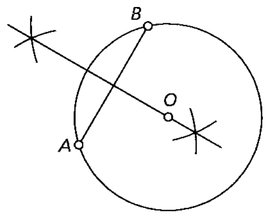
Recordamos las propiedades de las tangencias:



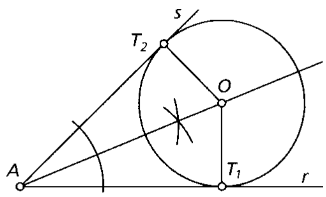
1. Si dos circunferencias son tangentes, el punto de tangencia se encuentra en la recta que une los centros.



2. Si una recta es tangente a una circunferencia, el radio en el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.



3. El centro de cualquier circunferencia que pase por dos puntos está en la mediatriz del segmento 3). Todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.



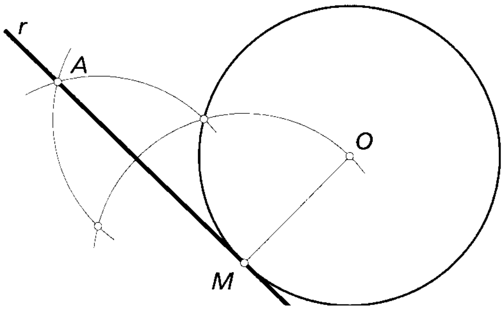
4. El centro de cualquier circunferencia tangente a dos rectas se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman.

El significado de las abreviaturas que acompañan a los epígrafes es el siguiente:

R radio ***p*** punto ***r*** recta ***c*** circunferencia

2. TRAZADO DE RECTAS

2.1. RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA QUE PASAN POR UN PUNTO



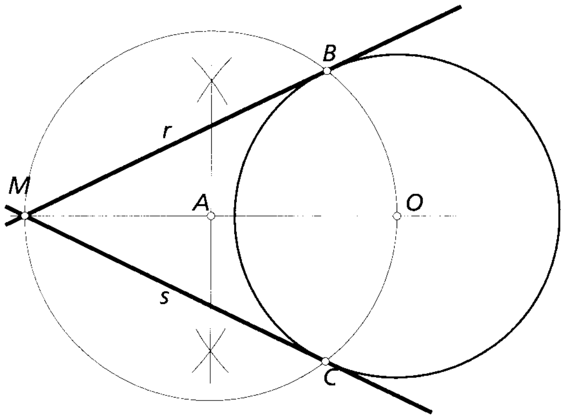
El punto está en la circunferencia

Dada la circunferencia de centro *0 y* el punto *M*:

1. Se traza el radio *OM* correspondiente al punto dado.
2. Por el punto *M* se traza la recta r perpendicular al radio *OM.*

El punto es exterior a la circunferencia

(Número de soluciones: 2.)

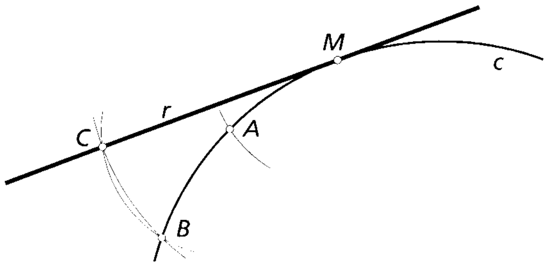


Dada la circunferencia de centro 0 y el punto:

1. Se dibuja el segmento *OM y* se halla el punto medio *A* del mismo mediante el trazado de la mediatriz.
2. Con centro en el punto *A y* radio *AO = AM* se traza la circunferencia que corta a la dada en los puntos *B* y *C*, puntos de tangencia de las soluciones.
3. Se une el punto *M* con los puntos *B* y *C* mediante las rectas *r* y *s*.

El centro de la circunferencia es desconocido

Sea el arco c y el punto *M* del arco:



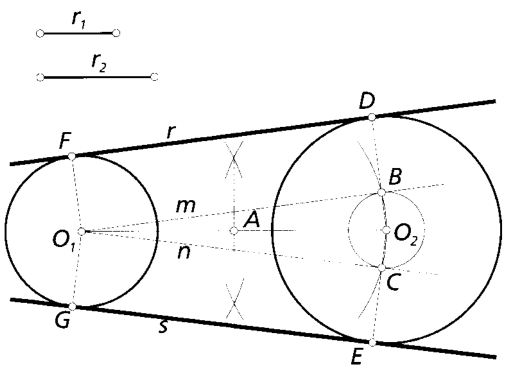
1. Con centro en el punto *M y* radio arbitrario se traza un arco que corta al dado en el punto *A.*
2. Con centro en el punto *A* y radio arbitrario se traza otro arco que corta al dado en el punto *B*.
3. Con centro en el punto *M* y radio *MB* se traza un arco que corta al anterior en el punto *C*.
4. La recta r que une los puntos *M y C* es la solución.

2.2. RECTAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS DE DISTINTO RADIO

Tangentes exteriores

(Número de soluciones: 2.)

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 y radios r_1 y r_2, respectivamente:



1. Con centro en *O*, centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $r_2 - r_1$.
2. Desde el centro O_1 se trazan las rectas *m* y *n* tangentes a la circunferencia anterior, de ra-

dio r_2 - $r_{,}$; para ello, con centro en el punto medio *A* del segmento O_1O_2, se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos *B y* C, que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y *n.*

3. Las rectas que unen el punto O_2 con *B y C* se cortan con la circunferencia dato en los puntos *D* y *E* de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por *O*, las rectas paralelas a O_2D *y a* O_2E hasta cortar a la circunferencia en los puntos *F* y *G.*
4. Las rectas *r* y *s* que unen los puntos de tangencia *FD y GE* son la solución.

Tangentes interiores

(Número de soluciones: 2.)

Sean las circunferencias de centro O_1 y O_2 y radios r_1 *y* r_2, respectivamente:

1 Con centro en O_2, centro de la circunferencia de mayor radio, se traza otra circunferencia cuyo radio valga $r_2 + r_1$.
2 Desde el centro O_1 se trazan las rectas *m y n* tangentes a la circunferencia anterior, de radio $r_2 + r_1$; es decir, con centro en el punto medio *A* del segmento O_1O_2, se dibuja un arco de radio AO_2 que corta a la circunferencia en los puntos *B y C,* que unidos con O_1 nos dan las tangentes m y *n.*
3 Las rectas que unen el punto O_2 con *B y C* se cortan con la circunferencia dato en los puntos *D* y *E* de tangencia. Los puntos de tangencia con la otra circunferencia se hallan trazando por 0, las rectas paralelas a O_2D *y* a O_2E, trazadas en sentido contrario, hasta cortar a la circunferencia en los puntos *F* y G.
4 Las rectas *r* y s que unen los puntos de tangencia *FD* y *GE* son la solución.

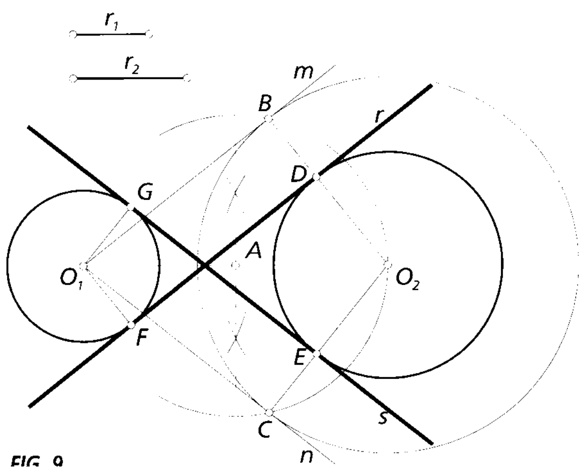
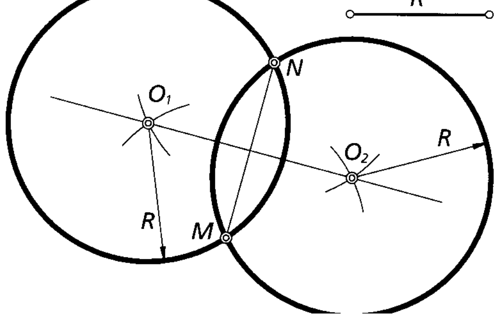


FIG. 9

3. TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS CONOCIENCIENDO EL RADIO

3.1. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS (Rpp)

Este no es un caso propiamente de tangencias; no obstante, se incluye aquí por seguir una cierta sistematización en el trazado de las mismas.

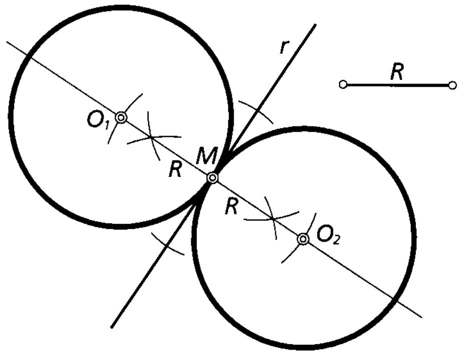


Dados los puntos *M y N,* y el radio *R* de la circunferencia:

1. Con centro en el punto *M y* radio *R* se trazan dos arcos de circunferencia.
2. Con centro en *N* y radio *R* se trazan

otros dos arcos de circunferencia que se cortan con los anteriores en los puntos O_1 y O_2 centros de las circunferencias solución.

3.2. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA RECTA (Rpr)



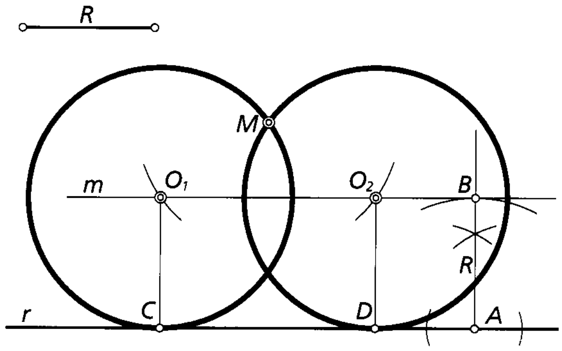
El punto está en la recta

Sean la recta r, el punto M de ella y el radio *R* de la circunferencia:

1. Por el punto *M* se traza la perpendicular a la recta *r*.
2. Sobre la perpendicular, y a partir del punto *M,* se llevan en ambos sentidos las distancias MO_1 *y* MO_2 iguales al radio *R* dado.
3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las soluciones y *M* el punto de tangencia común.

El punto es exterior

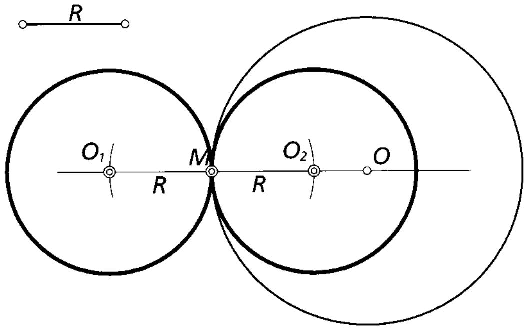
Sean la recta r, el punto *M y* el radio *R* de la circunferencia:



1. Por un punto *A* cualquiera de la recta *r* se traza la perpendicular a esta y sobre ella se transporta un segmento *AB* igual al radio *R;* a continuación, por el punto *B* se traza la recta m paralela a *r*.
2. Con centro en el punto *M y* radio *R* se trazan dos arcos de circunferencia que cortan a la recta m en los puntos O_1 y O_2, centros de las dos soluciones.
3. Por O_1 *y* O_2 se trazan las perpendiculares a la recta r, obteniendo los puntos *C* y *D* de tangencia.

3.3. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA (Rpc)

El punto está en la circunferencia



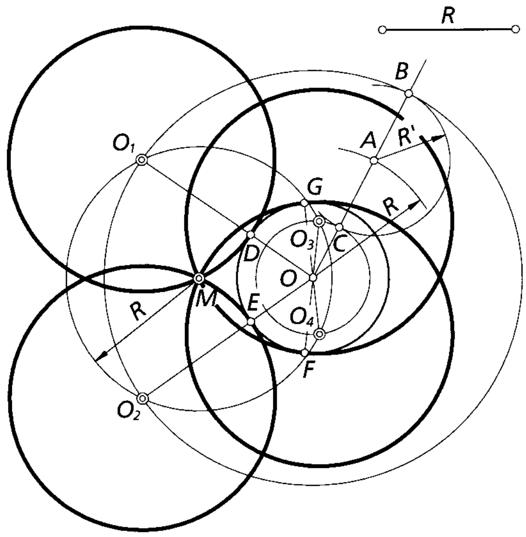
Sean la circunferencia de centro *O*, el punto *M* de ella y el radio *R* de las soluciones:

1. Se une el centro *O* con el punto *M.*
2. Sobre la recta anterior y a partir del punto *M* se lleva en ambos sentidos las distancias MO_1 *y* MO_2 iguales al radio *R* dado.

3. Los puntos O_1 y O_2 son los centros de las soluciones *y M* el punto de tangencia común.

El punto es exterior

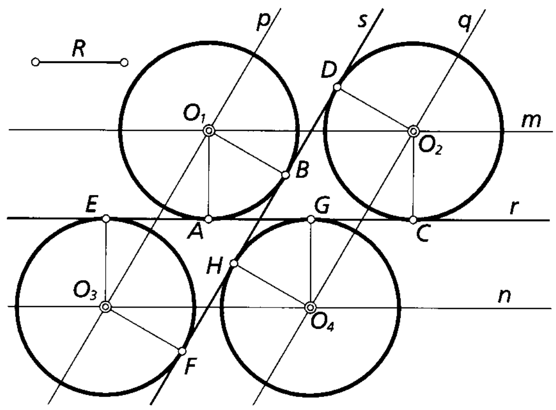
Sean la circunferencia de centro *O*, el punto *M* y el radio *R* de las circunferencias solución:



1. A partir del centro 0 se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento *OA = R;* en dicha recta se determinan también los punto *B y C* de forma que *AB = AC = R',* siendo *R'* el radio de la circunferencia dada de centro *O*.
2. Con centro en *O* y radios *OB = R + R' y OC = R - R'* se trazan sendas circunferencias.
3. Con centro en el punto *M y* radio *R* se traza la circunferencia que corta a las anteriores en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4, centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de intersección de la circunferencia dada con los segmentos OO_1, OO_2, OO_3 *y* OO_4 determinan los puntos *D, E, F* y *G* de tangencia.

3.4. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS QUE SE CORTAN (Rrr)

Sean las rectas r y s, y el radio *R*:



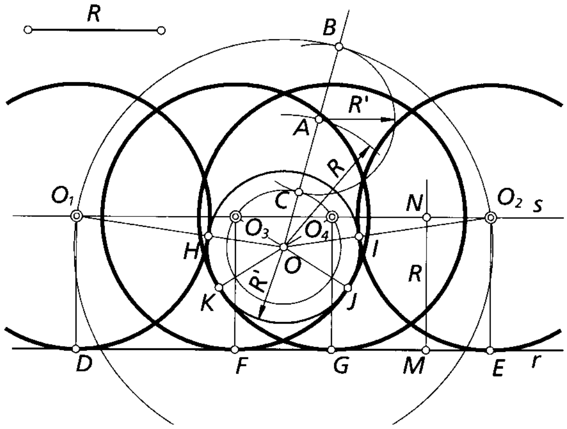
1. Se trazan dos rectas *m y n,* paralelas a *r*, a una distancia *R y* otras dos rectas *p* y *q,* paralelas a *s*, a una misma distancia *R.*
2. Donde las cuatro rectas *m, n, p y q* se cortan se obtienen los centros O_1, O_2, O_3 y O_4 de las soluciones.
3. Los puntos de tangencia *A, B, C,* etc., se hallan trazando por los centros O_1, O_2, O_3 *y* O_4 las perpendiculares a las rectas *r* y *s*.

3.5. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA (Rrc)

La circunferencia y la recta son exteriores

Dadas la recta r, la circunferencia de centro 0 y el radio *R*:

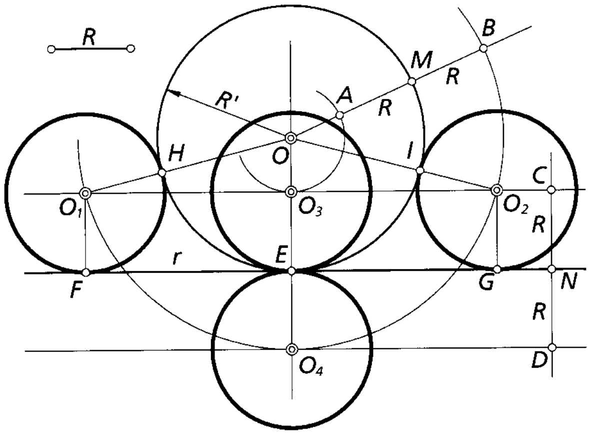
1. A partir del centro *O* se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento *OA = R;* en dicha recta se determinan también los puntos *B y C* de forma que *AB = AC = R',* siendo *R'* el radio de la circunferencia dada de centro *O*.



2. Con centro en *O* y radios *0B = R + R' y OC = R - R'* se trazan sendas circunferencias.
3. Por un punto *M* de *r* se traza una perpendicular a esta; sobre ella se transporta un segmento *MN = R y* por *N se* traza una recta s paralela a *r*.
4. La recta *s* corta a las circunferencias anteriores en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4. Los puntos de tangencia *H*, *I, J y K* con la circunferencia se hallan uniendo los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 con *O, y* los puntos de tangencia *D, E, F* y *G* con la recta *r*, trazando las perpendiculares a esta de centros anteriores.

La circunferencia y la recta son tangentes

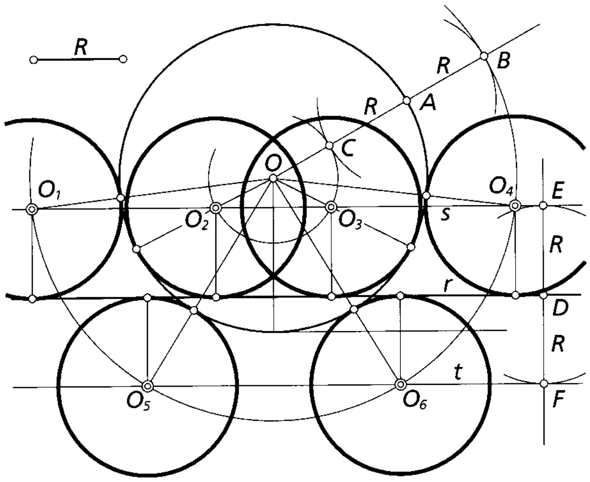
Dadas la recta r, la circunferencia de centro 0 y el radio *R*:



1. Con centro en *O* y radios *OA = R'- R y OB = R'+ R* se trazan dos circunferencias, siendo *R'* el radio de la circunferencia dada de centro *O*.
2. Por un punto *N* cualquiera de la recta *r* se traza una perpendicular a esta; sobre ella se transportan los segmentos *NC = ND = R* y por los puntos *C y D* se trazan las rectas paralelas a *r*.
3. Las rectas paralelas cortan a las circunferencias anteriores (o son tangentes) en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4, centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de tangencia se determinan como en los casos anteriores.

La circunferencia y la recta son secantes

Dadas la recta r, la circunferencia de centro *O* y el radio R:

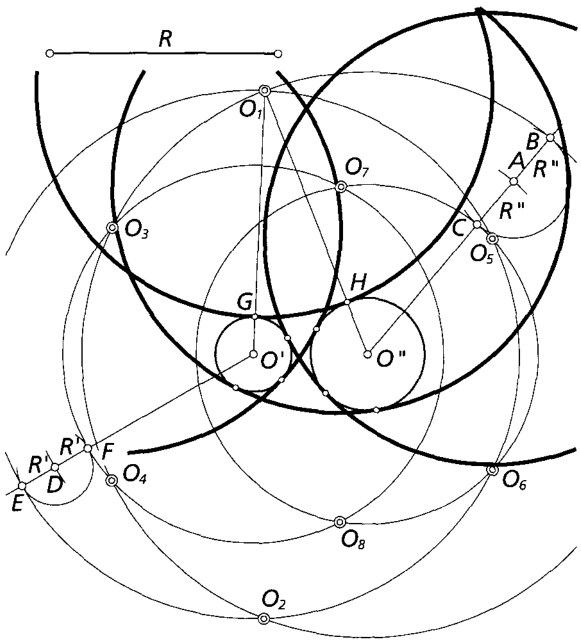


1. Desde el centro *O* se traza un radio *OA* arbitrario, llevando a partir del punto *A,* y en ambos sentidos, los segmentos *AB = AC = R y* trazando a continuación dos arcos de centro 0 y radios *OB y OC.*
2. Por un punto *D* cualquiera de la recta *r* se traza una perpendicular a esta y sobre ella se transportan los segmentos *DE = DF = R,* trazando a continuación por *E y F* las rectas *s* y *t* paralelas a *r*.
3. Los puntos de intersección O_1, O_2, O_3 , O_4, O_5 y O_6 de las rectas *s* y *t* con los arcos de la circunferencia trazados anteriormente son los centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.

3.6. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS (Rcc)

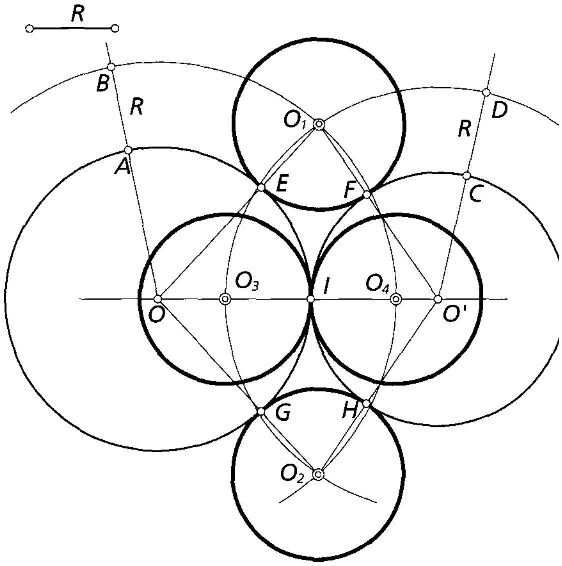
Las circunferencias son exteriores

Dadas las circunferencias de centros *O'* y *O"* y el radio *R*:



1. A partir del centro *O'* se traza una recta cualquiera y sobre ella se transporta el segmento *O'D* = R; en dicha recta se determinan también los puntos *E* y *F* de forma que *DE = D F= R',* siendo *R'* el radio de la circunferencia dada de centro *O´*.
2. Desde *O"* se traza otra recta, llevando sobre ella el segmento *0"A = R* y determinando los puntos *B* y *C* de forma que *AB = AC = R",* siendo *R"* el radio de la circunferencia dada de centro *O"*.
3. Con centro en *O'* y radios *O'E = R + R' y O'F = R - R'* y con centro en *O"* y radios *0"B = R + R"* y *O"C = R - R"* se trazan cuatro circunferencias que se cortan en los puntos O_1, O_2, O_3, ..., O_8, centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de tangencia se determinan al unir los centros de las circunferencias de que se trate.

En la figura se han dibujado solo las circunferencias de centros O_1, O_3 , O_5 y O_7, para mayor claridad.

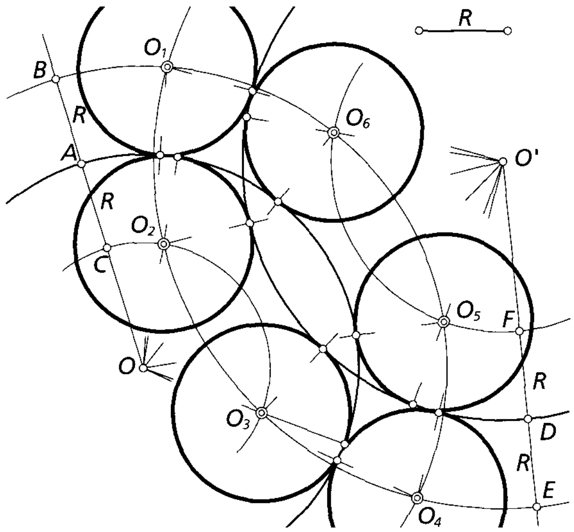


Las circunferencias son tangentes

Dadas las circunferencias de centro *O* y O' y el radio *R*:

1. Con centro en *O* y radio *OB = OA + R y* con centro en *O'* y radio *O'D = O'C + R* se trazan dos circunferencias.
2. Las dos circunferencias anteriores se cortan entre sí en los puntos O_1 y O_2 que, junto con los puntos O_3 y O_4 de intersección con la recta *OO'*, determinan los centros de las soluciones.
3. Los puntos de tangencia se determinan como en casos anteriores.

Las circunferencias son secantes

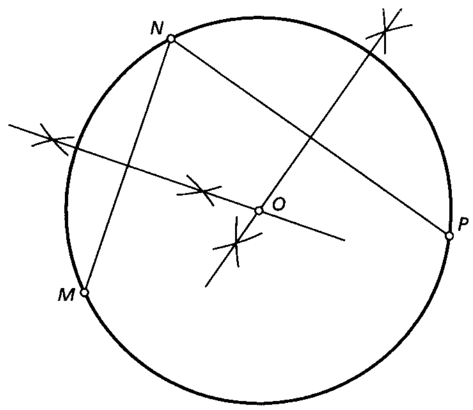


Dadas las circunferencias de centro *O* y *O'* y el radio *R*:

1. Con centro en *O* y radios *OB = OA + R y OC = OA -1* se trazan dos circunferencias.
2. Con centro en *O'* y radios *OE = OD + R y OF = OD - 1*se dibujan otras dos circunferencias.
3. Las circunferencias anteriores se cortan en los punto O_1, O_2, ..., O_6, centros de las soluciones.
4. Los puntos de tangencia se determinan, como en casos anteriores, uniendo centros.

4. TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS SIN CONOCER EL RADIO

4.1. CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR TRES PUNTOS (ppp)



Aunque no es un problema propiamente de tangencias, incluimos aquí su explicación.
Dados los puntos *M, N y P*:

Se trazan las mediatrices de los segmentos *MN y NP.*

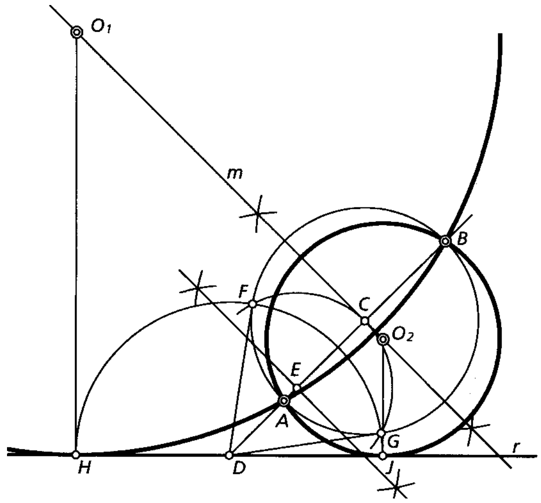
El punto *O* de intersección de las dos mediatrices es el centro de la circunferencia que pasa por los tres puntos.

El punto *O* es el circuncentro del triángulo formado por los puntos *M, N y P,* tal como se vio en el tema correspondiente; por ello, se hubiera obtenido el mismo resultado si se traza la mediatriz del segmento *MP.*

4.2. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS Y SON TANGENTES A UNA RECTA (ppr)

Los puntos son exteriores

Dada la recta r y los puntos *A y B*:

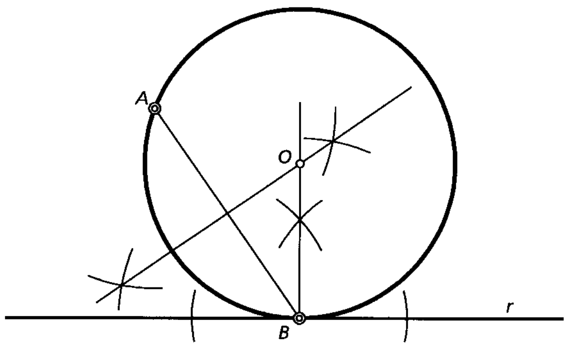


1. Se dibuja la mediatriz *m* del segmento *AB.*
2. Se dibuja una circunferencia cualquiera que pase por los puntos *A y B,* por ejemplo la que tiene por centro el punto C.
3. Por el punto *D* de intersección de las rectas *AB* y r se trazan las tangentes a la circunferencia de centro C, obteniendo los puntos de tangencia *F y G.*
4. Con centro en *D* y radio *DF* = *DG* se traza la circunferencia que corta a la recta *r* en los puntos *H* y *J,* que son los puntos de tangencia de las circunferencias solución.
5. Por *H* y *J* se trazan las perpendiculares a *r* hasta cortar a *m* en *O*, y O_2, centros de las soluciones.

Obsérvese que el punto *D* es el centro radical de todas las circunferencias que pasan por los puntos *A y B.*

Un punto está en la recta

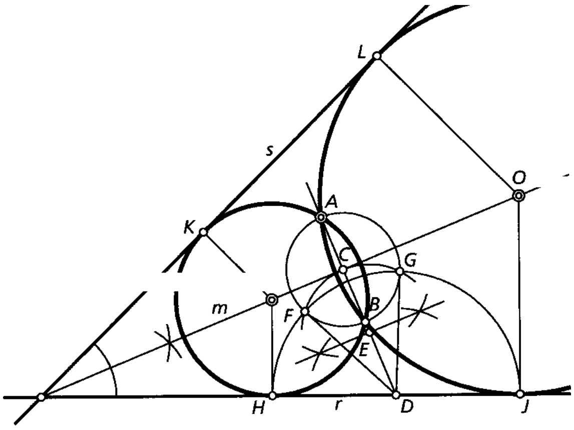
Dada la recta r y los puntos *A y B*:



1. Se dibuja la mediatriz del segmento *AB.*
2. Por el punto *B* se traza la perpendicular a la recta *r*, que se corta con la mediatriz anterior en el punto *O*, centro de la solución.

4.3 CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A DOS RECTAS (prr)

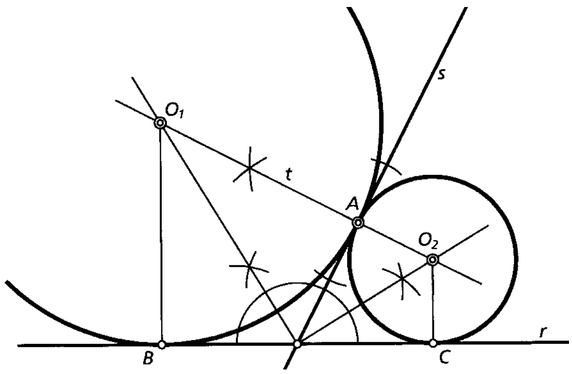
El punto es exterior



Dadas las rectas *r* y *s* y el punto *A*:

1. Se dibuja la bisectriz m del ángulo que forman las rectas *r* y *s*.
2. Se halla el punto *B* simétrico de *A* respecto de *m.*
3. Se aplica el procedimiento para trazar las circunferencias que pasan por dos puntos *A* y *B* y son tangentes a una recta, la *r* o la *s*.

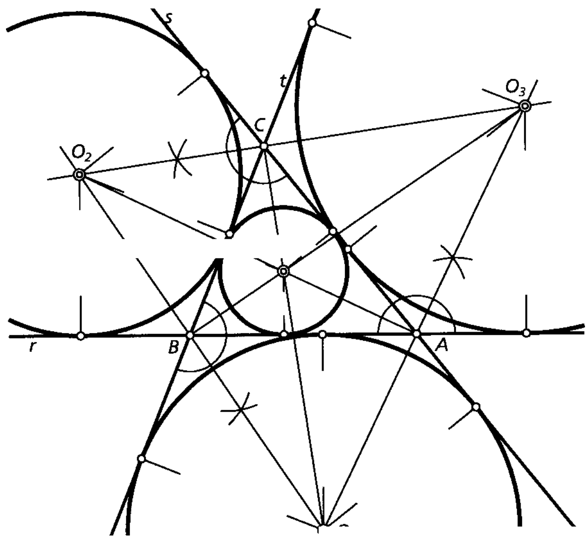
El punto está en una de las rectas



Dadas las rectas *r* y s y el punto *A*:

1. Por el punto *A* se traza la recta *t* perpendicular a la recta s.
2. Se trazan las bisectrices interior y exterior del ángulo que forman las dos rectas *r* y *s.*
3. Las bisectrices anteriores se cortan con la recta *t* en los puntos O_1 y O_2, centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de tangencia *B* y *C* se hallan trazando por O_1 y O_2 las perpendiculares a la recta *r.*

4.4. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A TRES RECTAS (rrr)

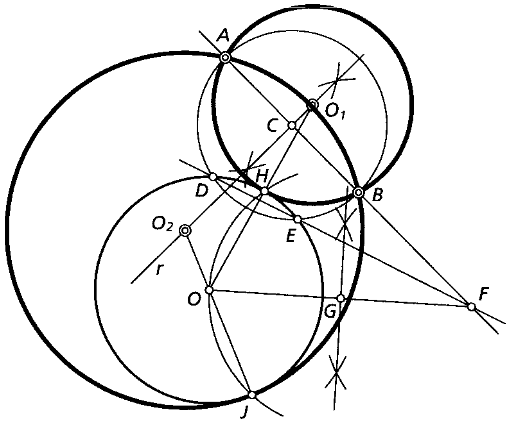


Dadas las rectas *r,* s y *t* que se cortan en los tres puntos *A, B* y *C*:

1. Se trazan las bisectrices, tanto interiores como exteriores, de los ángulos que forman las tres rectas al cortarse.
2. Las bisectrices interiores se cortan en el punto O_1 y las bisectrices exteriores se cortan en los puntos O_2, O_3 y O_4 que son los centros de las cuatro soluciones.
3. Los puntos de tangencia se hallan trazando desde O_1, O_2, O_3 y O_4 las perpendiculares a cada una de las tres rectas *r, s* y *t.*

4.5. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR DOS PUNTOS Y SON TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA (ppc)

Los puntos son exteriores

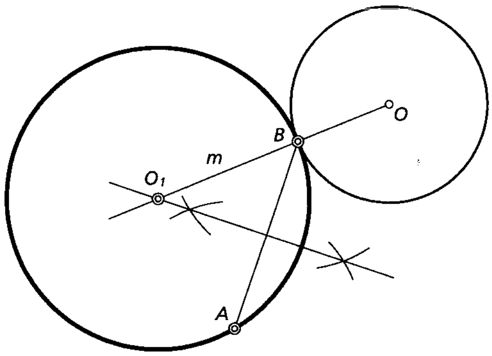


Dada la circunferencia de centro *O* y los puntos *A* y *B*:

1. Se dibuja la mediatriz *r* del segmento *AB.*
2. Se dibuja una circunferencia cualquiera que pase por los puntos *A* y *B* y que corte a la circunferencia dada; por ejemplo, la que tiene por centro el punto *C* que se corta con la anterior en los puntos *D* y *E.*
3. Por el punto *F* de intersección de las rectas *AB* y *DE* se trazan las tangentes a la circunferencia de centro *O,* obteniendo los puntos de tangencia *H* y *J.*
4. Se unen los puntos *H* y *J* con el centro *O* hasta cortar a la recta *r* en O_1 y O_2 centros de las soluciones.

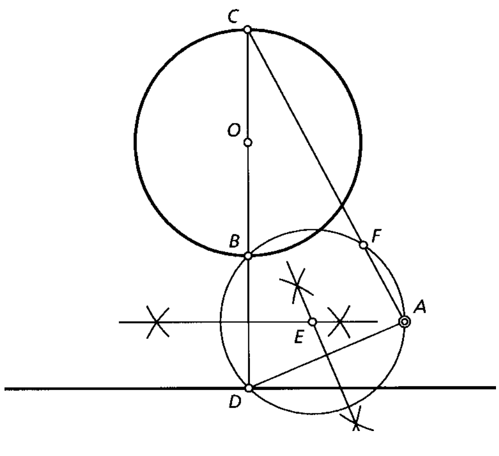
La recta *DE* es el eje radical de las circunferencias de centros *O* y *C,* y la recta *AB* es el eje radical de las circunferencias de centro *C* y de las soluciones (que pasan por *A* y *B).* En consecuencia, el punto *F* es el centro radical de todas ellas y, por tanto, el valor de las tangentes (distancia del centro radical al punto de tangencia de cada recta tangente) vale lo mismo.

Un punto está en la circunferencia



Dada la circunferencia de centro *O* y los puntos *A* y *B*:

1. Se une *B* con el centro *O* mediante la recta *m*.
2. Se traza la mediatriz del segmento *AB* que se corta con la recta *m* en el punto O_1, centro de la solución.



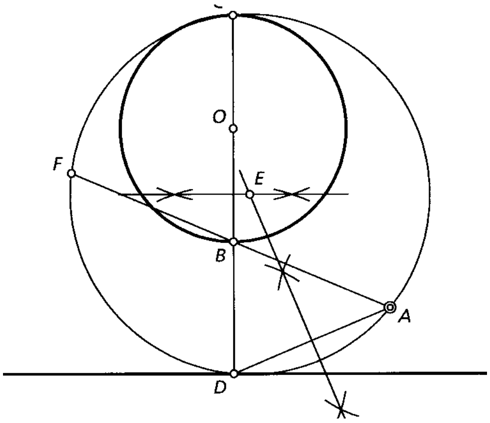
4.6. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A UNA RECTA Y A UNA CIRCUNFERENCIA (prc)

El punto es exterior

Dada la circunferencia de centro *O*, la recta *r* y el punto *A*:

1. Por el punto *O* se traza la perpendicular a la recta *r* que corta a la circunferencia en *S* y *C* ya la recta en el punto *O.*
2. Se traza la circunferencia, de centro *E,* que pasa por los puntos *A, S y D*. La recta *AC* corta a esta circunferencia en el punto *F.*

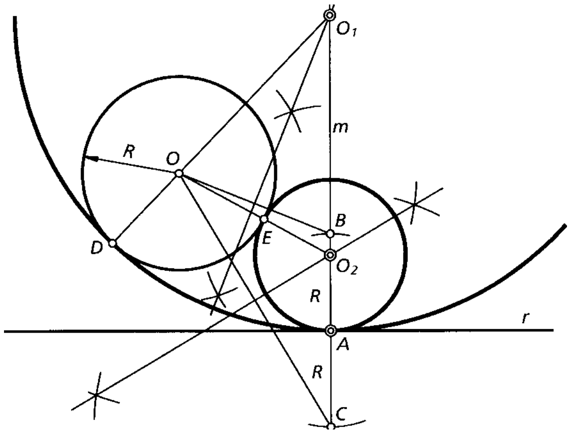
El problema ahora se limita a trazar las circunferencias que pasan por dos puntos *A* y *F* y son tangentes a una rect[illegible]so ya estudiado.



3. Se traza la circunferencia, de centro *E,* que pasa por los puntos *A, C y O*. La recta *AB* corta a esta circunferencia en el punto *F.*

El problema ahora se limita a trazar las circunferencias que pasan por dos puntos *A* y *F,* y son tangentes a una recta *r* caso ya estudiado. Este problema, como puede observarse, tiene cuatro soluciones.

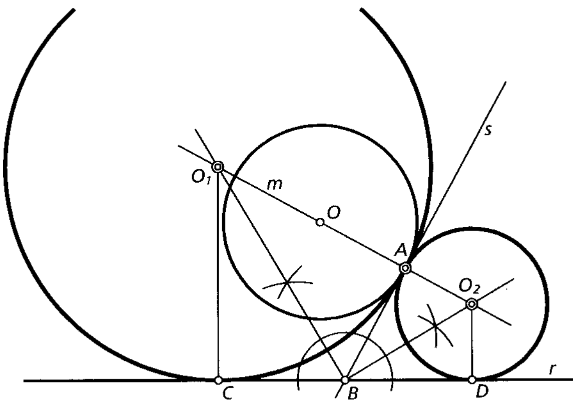
El punto está en la recta



Dada la circunferencia de centro 0, la recta (y el punto *A*:

1. Por el punto *A* se traza la recta m perpendicular a la recta *r*.
2. Sobre la recta *m* ya partir del punto *A* se llevan, a ambos lados de *r*, dos segmentos *AB* y *AC* iguales a *R,* radio de la circunferencia dada.
3. Se trazan las mediatrices de los segmentos *OB* y OC.
4. Los puntos O_1 y O_2 de intersección de las mediatrices anteriores con la recta *m* son los centros de las circunferencias solución.
5. Los puntos de tangencia *D* y *E* se hallan uniendo los puntos O_1 y O_2 con el centro O.

El punto está en la circunferencia



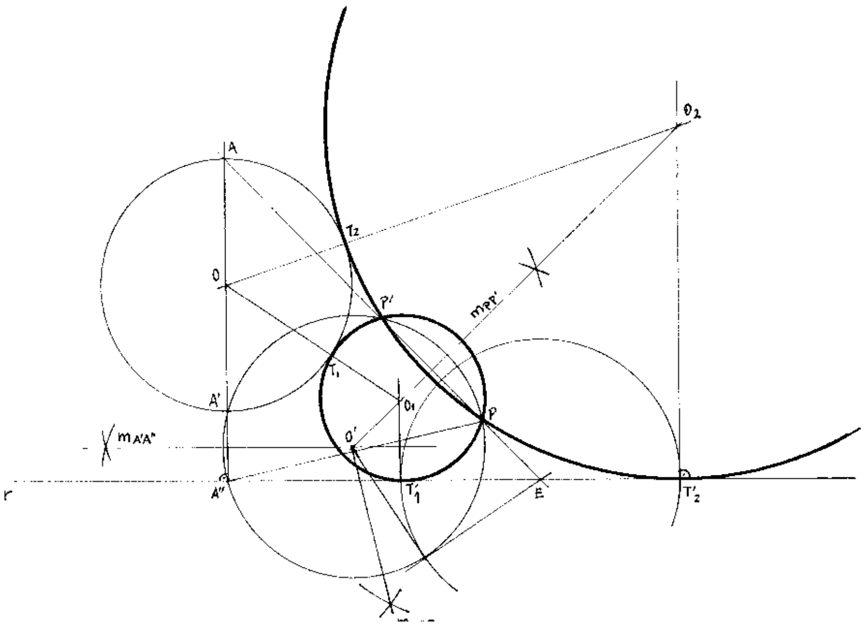
Dada la circunferencia de centro *O*, la recta *r* y el punto *A*:

1. Se une el punto *A* con el centro *O* mediante la recta *m*.
2. Por el punto *A* se traza la tangente *s* a la circunferencia, que corta a la recta *r* en el punto *B.*

3. Por el punto *S* se trazan las dos bisectrices del ángulo que forman las rectas *r* y *s.*
4. Los puntos O_1 y O_2 de intersección de las bisectrices anteriores con la recta *m* son los centros de las circunferencias solución.
5. Los puntos de tangencia *C y D* se hallan trazando por O_1 y O_2as perpendiculares a la recta *r*.

4.7. CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA, A UNA RECTA Y QUE PASEN POR UN PUNTO EXTERIOR

1. *Obtenemos dos soluciones por inversión positiva* $\boldsymbol{O_1}$ *y* $\boldsymbol{O_2}$*:*

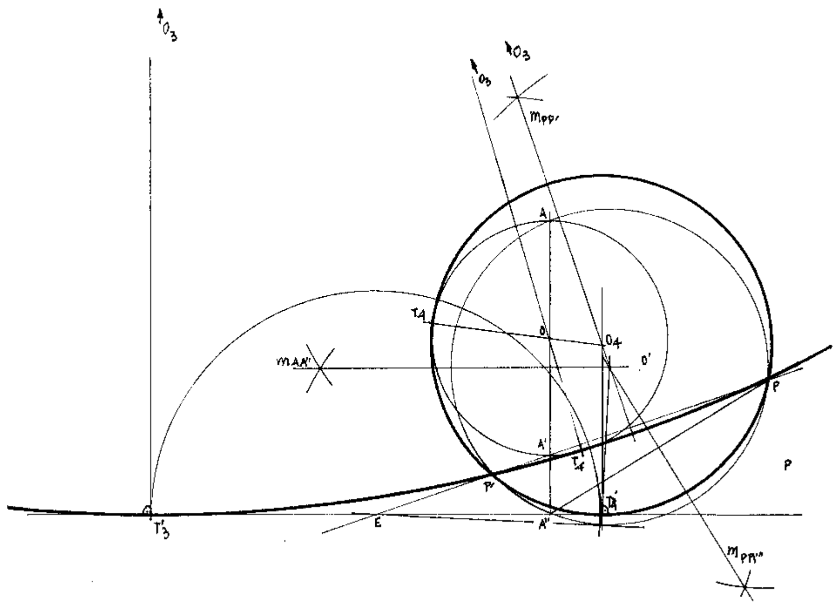


En primer lugar determinamos los puntos A, A´, A´´ trazando una perpendicular desde O a la recta r. A continuación hallamos P´ (que será el homologo de P, como lo son el par de puntos A´ y A´´, respecto al centro de inversión A). Para ello trazaremos las mediatrices de A´A´´, y de A´´P, determinando el centro de la circunferencia O´, desde el centro de la inversión A trazamos una recta que pase por P y que determina P´.

La recta que desde a une los puntos homólogos P y P´ corta a la recta dada en E, que es el centro radical de todas las circunferencias, y que equidista de los puntos de tangencia $T´_1$ y $T´_{2.}$

Los centros de las circunferencias O_1 O_2 estarán situados en la intersección de las perpendiculares a la recta r desde los puntos de tangencia co la mediatriz de la cuerda PP´ (eje coaxial de las circunferencias solución).

2. *Obtenemos otras dos soluciones por inversión negativa* $\boldsymbol{O_3}$ *y* $\boldsymbol{O_4}$*:*



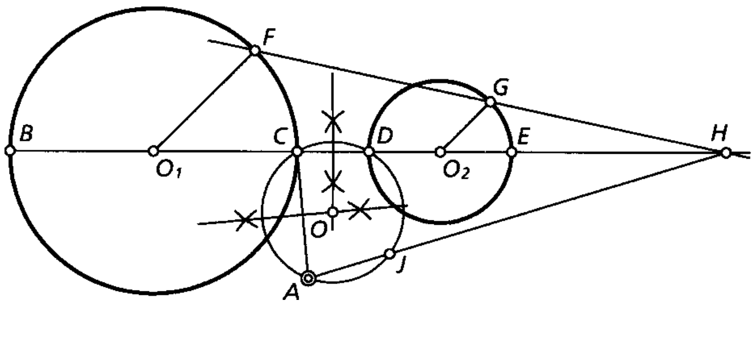
En primer lugar determinamos los puntos A, A´, A´´ trazando una perpendicular desde O a la recta r. A continuación hallamos P´ (que será el homologo de P, como lo son el par de puntos A y A´´, respecto al centro de inversión A´). Para ello trazaremos las mediatrices de AA´´, y de A´´P, determinando el centro de la circunferencia O´, desde el centro de la inversión A´ trazamos una recta que pase por P para determinar P´.

La recta que desde a une los puntos homólogos P y P´ corta a la recta dada en E, que es el centro radical de todas las circunferencias, y que equidista de los puntos de tangencia T´$_3$ y T´$_4$.

Los centros de las circunferencias O_3 y O_4 estarán situados en la intersección de las perpendiculares a la recta r desde los puntos de tangencia con la mediatriz de la cuerda PP´ (eje coaxial de las circunferencias solución).

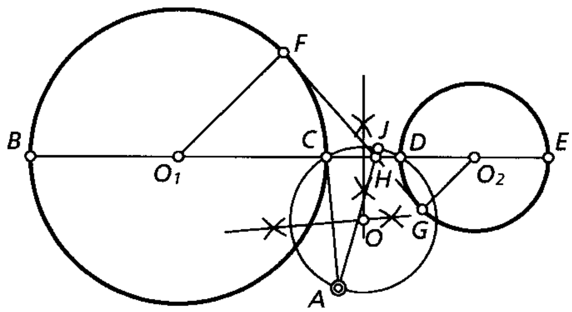
4.8. CIRCUNFERENCIAS QUE PASAN POR UN PUNTO Y SON TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS (pcc)

El punto es exterior



Dadas las circunferencias de centro O_1 y O_2 y el punto *A*:

1. Se dibuja la recta O_1 y O_2 que corta a las circunferencias en los puntos *B, C*, *O* y *E.*



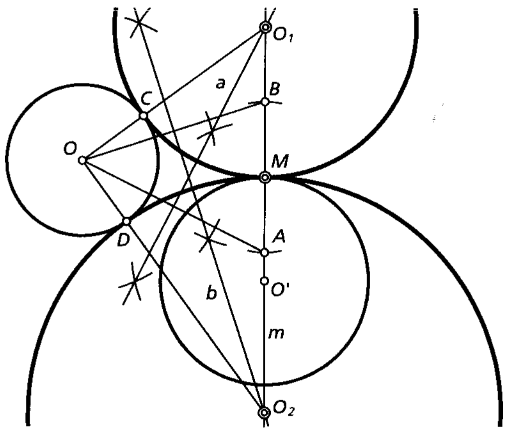
2. Por los centros O_1 y O_2 se trazan dos radios paralelos en el mismo sentido que cortan a sus respectivas circunferencias en *F* y *G*. La recta *FG* se corta con la recta O_1 y O_2 en el

punto *H.* Se traza la circunferencia que contiene a los puntos *A, C* y *D*, que se corta con la recta *HA* en el punto *J.*

3. Por los centros O_1 y O_2 se trazan dos radios paralelos en sentido contrario que cortan a sus respectivas circunferencias en *F* y *G*. Se traza la circunferencia que contiene a los puntos *A, C* y *O*, que se corta con la recta *HA* en el punto *J.*

El problema en ambos casos se limita a trazar las circunferencias que pasan por dos puntos *A* y *J,* y son tangentes a una circunferencia, caso ya estudiado. Por tanto, el problema tiene cuatro soluciones.

El punto está en una de las circunferencias

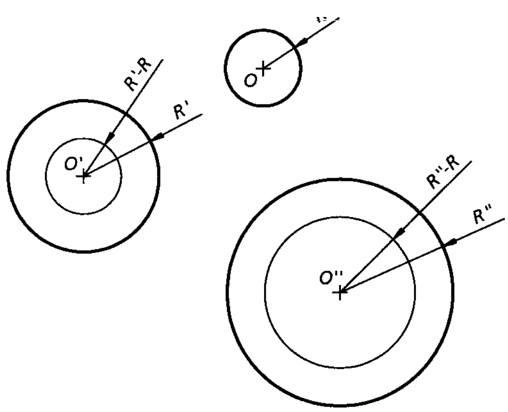


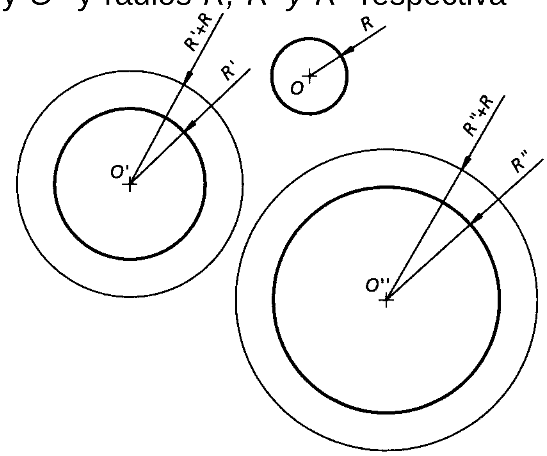
Dadas las circunferencias de centros O y *O'* y el punto *M*:

1. Se traza la recta m que une los puntos *M* y *O´*, y a partir del punto *M* se trasladan sobre dicha recta los segmentos *MA* y *MB* iguales al radio de la circunferencia de centro *O.*
2. Se trazan las mediatrices de los segmentos *OA* y *OB* respectivamente.
3. Los puntos O_1 y O_2 de intersección de las mediatrices con la recta *m* son los centros de las circunferencias solución.
4. Los puntos de tangencia *C* y *D* se hallan uniendo los puntos O_1 y O_2 con *O*.

4.8. PROBLEMA DE APOLONIO: CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A TRES CIRCUNFERENCIAS (ccc)

Dadas las circunferencias de centro *O, O'* y *O"* y radios *R, R' y R"* respectivamente:





2. centros en *O'* y *O''* se trazan dos circunferencias de radios *R'-R* y *R''-R* respectivamente.
   El problema a partir de ahora se limita a trazar las circunferencias que pasan por un punto *O* y son tangentes a dos circunferencias, caso que ya se ha estudiado anteriormente y que tiene cuatro soluciones.
3. Con centros en *O'* y *O''* se trazan dos circunferencias de radios *R'+R y R''+R* respectivamente.
   Como en el apartado anterior, se dibujan las circunferencias que pasan por el punto *O* y son tangentes a estas dos nuevas circunferencias, obteniendo así cuatro soluciones más.

   A título de ejemplo se han dibujado dos de las ocho soluciones que tiene en total el ejercicio.

1. Como ya se ha indicado, se dibujan las circunferencias de centros *O'* y *O''* y radios *R'-R* y *R''-R* respectivamente.
2. Se trazan los radios paralelos *O'C* y *O''D* y se halla el punto *E* de intersección de las rectas *CO* y *O'* y *O''*, Se dibuja la circunferencia que pasa por los puntos *A, B* y *O*, que corta a la recta *OE* en el punto *F.* A partir de ahora el problema consiste en hallar las circunferencias que pasan por los puntos *O* y *F* y son tangentes a la circunferencia de centro *O''.*
3. Se dibuja una circunferencia que contenga a los puntos *O* y *F* y que corte a la circunferencia de centro *O''* en dos puntos *B* y G.
   Se determina el punto *H* de intersección de las rectas *FO* y *BG* y se hallan los puntos de tangencia) y *K* de las rectas tangentes trazadas desde *H* (no dibujadas).
4. Donde se cortan las rectas *O''J* y con la mediatriz *m* del segmento *OF* se obtienen los centros O_1 y O_2 de dos soluciones. Los puntos de tangencia se obtienen uniendo O_1 y O_2 con *O*, *O'* y *O''*.

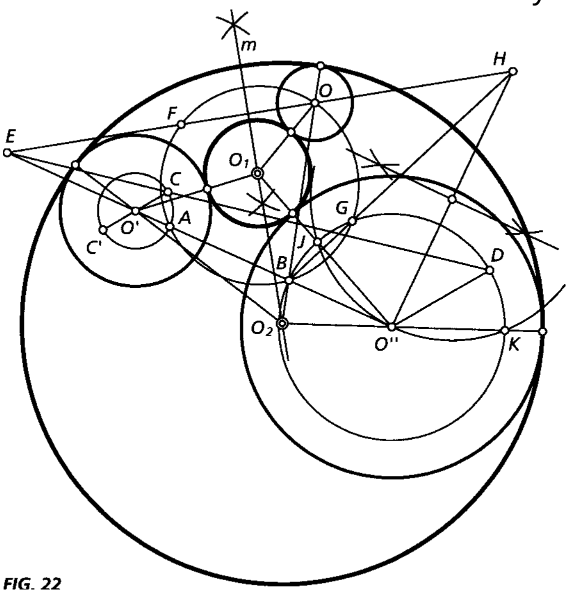


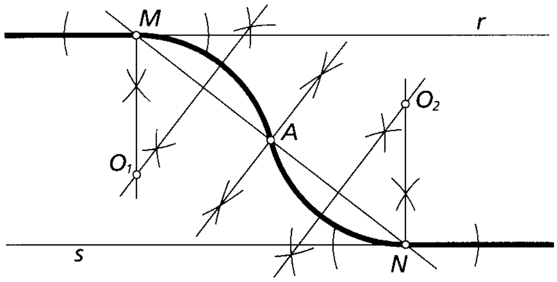
FIG. 22

Otras dos soluciones se obtienen al trazar, en el apartado 2 anterior, los radios paralelos *O'C'* y *O''D* en sentido contrario.

5. ENLACES

5.1. ENLAZAR DOS RECTAS PARALELAS MEDIANTE DOS ARCOS DE IGUAL RADIO, CONOCIENDO LOS PUNTOS DE TANGENCIA

Dadas las rectas *r* y *s,* y los puntos *M* y *N*:

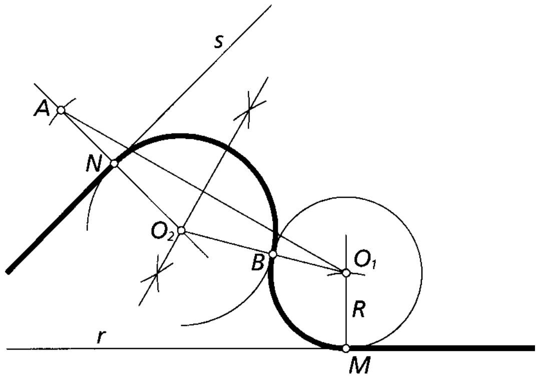


Los centros de los arcos estarán en las perpendiculares trazadas por los puntos *M y N* a las rectas r y s.

1. Se halla el punto medio *A* del segmento *MN.*
2. Se trazan las mediatrices de los segmentos *AM y AN.*
3. Donde las mediatrices se cortan con las perpendiculares trazadas por *M y N* están los puntos O_1 y O_2, centros de los arcos solución, que son tangentes entre sí en el punto *A.*

5.2. ENLAZAR DOS RECTAS CUALESQUIERA POR MEDIO DE DOS ARCOS, CONOCIENDO EL RADIO DE UNO DE ELLOS Y LOS PUNTOS DE TANGENCIA

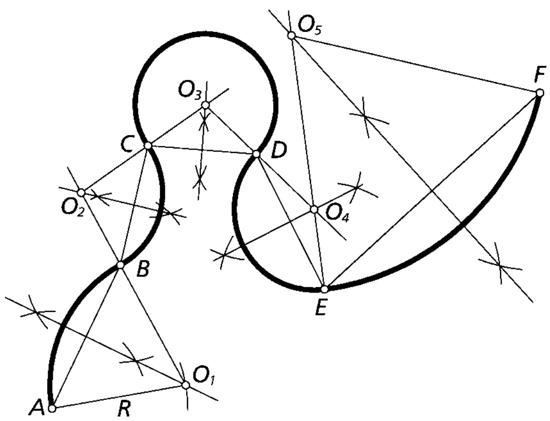
Dadas las rectas r y s, los puntos de tangencia *M y N, y* el radio *R*:



1. Por los puntos *M y N* se trazan perpendiculares a *las* rectas *r y s,* respectivamente.
2. Sobre la perpendicular a *r* se traslada, hacia el' interior del ángulo, el segmento $MO_1 = R$, y sobre la perpendicular a *s*, hacia el exterior, el segmento $NA = R$. O_1 es el centro de uno de los arcos.
3. La mediatriz del segmento O_1A corta a la perpendicular a *s* en el punto O_2, centro del segundo arco. El punto *B* de tangencia entre las dos circunferencias está en la recta O_1O_2.

5.3. ENLAZAR VARIOS PUNTOS NO ALINEADOS, MEDIANTE ARCOS DE CIRCUNFERENCIA, CONOCIENDO EL RADIO DE UNO DE LOS ARCOS

Dados los puntos *A, B, C, D, E,* etc., y el radio *R* del arco *AB*:



1. Se unen los puntos *A y B,* trazando a continuación la mediatriz del segmento; con centro en el punto *A y* radio *R* se traza un arco que corta a la mediatriz en el punto O_1. Con centro en el punto O_1 se traza el arco *AB.*
2. Se unen los puntos *B y C,* trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta O_1B en el punto O_2. Con centro en el punto O_2 se traza el arco *BC,* que es tangente al anterior en *B.*
3. Se unen los puntos *C y D,* trazando la mediatriz del segmento, que corta a la recta O_2C en el punto O_3. Con centro en O_3 se traza el arco *CD,* que es tangente al anterior en *C*, y así sucesivamente.

ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LAS TANGENCIAS

CASOS DE TANGENCIAS EN LOS QUE LAS SOLUCIONES SON RECTAS

1. Rectas tangentes a una circunferencia "c" en un punto "Pc" de esta
2. Rectas tangentes a una circunferencia "c" paralelas a una dirección dada "d"
3. Rectas tangentes a una circunferencia "c" desde un punto exterior "P"
4. Rectas tangentes comunes a dos circunferencias "c y c' " (2 h)

CASOS DE TANGENCIAS EN LOS QUE LAS SOLUCIONES SON CIRCUNFERENCIAS

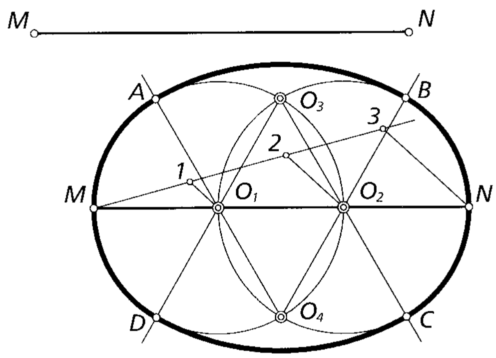
5. Circunferencias tangentes a una recta "r" en punto de ella "Pr" conocido el radio "p" de la solución
6. Circunferencias tangentes a una circunferencia "c" en un punto de ella "Pc" conocido el radio "p" de la solución
7. Circunferencias tangentes a una recta "r" en un punto de ella "Pr" y que pasen por un punto exterior "P"
8. Circunferencias tangentes a una circunferencia "c" en un punto "Pc" de ella y que pasen por un punto exterior "Pe"
9. Circunferencias tangentes a una recta "r" que pasen por un punto exterior "Pe" conocido el radio "p" de las soluciones
10. Circunferencias tangentes a una circunferencia "c" que pasen por un punto exterior "Pe" conocido el radio "p" de las soluciones
11. Circunferencias tangentes a dos circunferencias "c" y "c' " conocido el radio "p" de la solución
12. Circunferencias tangentes a una circunferencia "c" y a una recta "r" conocido el radio "p" de la solución
13. Circunferencias tangentes a una circunferencia "c" y a una recta "r" dado el punto de tangencia "Pc" sobre la circunferencia
14. Circunferencias tangentes a dos rectas "r" y "r' " conocido el radio "p" de la solución
15. Circunferencias tangentes a dos rectas "r" y "r' "y que pasen por un punto exterior "P."
16. Circunferencias tangentes a una recta "r" y a una circunferencia "c", dado el punto de contacto sobre la recta "Pr"

CURVAS TÉCNICAS TANGENCIALES

1. ÓVALO

El óvalo es una curva cerrada, plana y convexa formada generalmente por cuatro arcos de circunferencia iguales dos a dos; tiene dos *ejes* de simetría perpendiculares entre sí. La aplicación práctica más importante en dibujo técnico está en el trazado de perspectivas, pues suelen sustituirse, de forma aproximada, las elipses por óvalos.

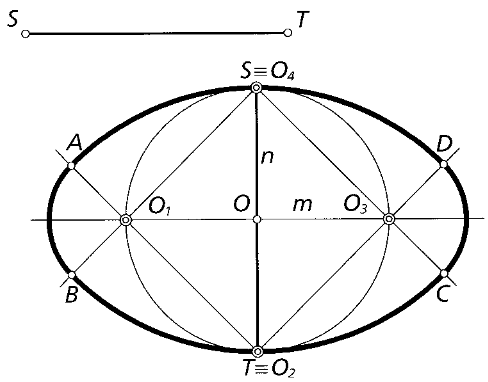
1.1. CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDO EL EJE MAYOR



Sea *MN* el eje mayor del óvalo:

1. Se divide el segmento *MN* en tres partes iguales obteniendo los puntos O_1 yO_2.
2. Con centros en O_1 *y* O_2 se trazan las circunferencias de radios O_1M *y* O_2N, respectivamente.
3. Los puntos de intersección de estas dos circunferencias, 03y 0_{4i} son los centros de los otros dos arcos del óvalo.

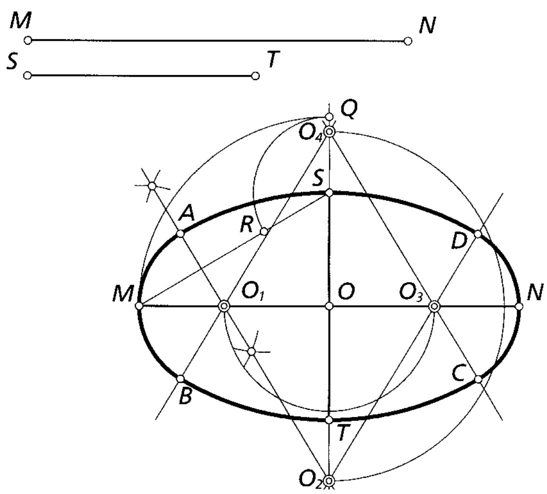
1.2. CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDOEL EJE MENOR



Sea *ST* el eje menor del óvalo:

1. Se dibuja una circunferencia de diámetro *ST y* se trazan los diámetros perpendiculares *m y n.*
2. Con centro en los puntos O_1, 0_2, 0_3 *y* O_4 se trazan los cuatro arcos que forman el óvalo.

1.3. CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO DE CUATRO CENTROS CONOCIENDO LOS DOS EJES PERPENDICULARES



Sean *MN y ST* los ejes:

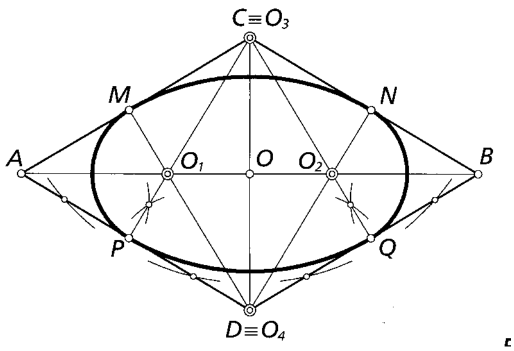
1. Se dibujan *MN* y *ST* cortándose en su punto medio *O*.
2. Con centro en *O* y radio el semieje mayor *OM* se traza un

arco hasta cortar al otro eje en *Q.*

3. Con centro en *S* y radio *SQ* se traza otro arco que corta a la recta *MS* en *R.*
4. Se traza la mediatriz del segmento *MR,* que corta a los ejes en los puntos O_1 *y* O_2.
5. Los puntos O_1 *y* O_2, junto con los puntos O_3 *y* O_4, simétricos de los anteriores respecto del centro 0, son los centros de los arcos del óvalo.

1.4. CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO INSCRITO EN UN ROMBO DADO

Sea el rombo *ADBC*:

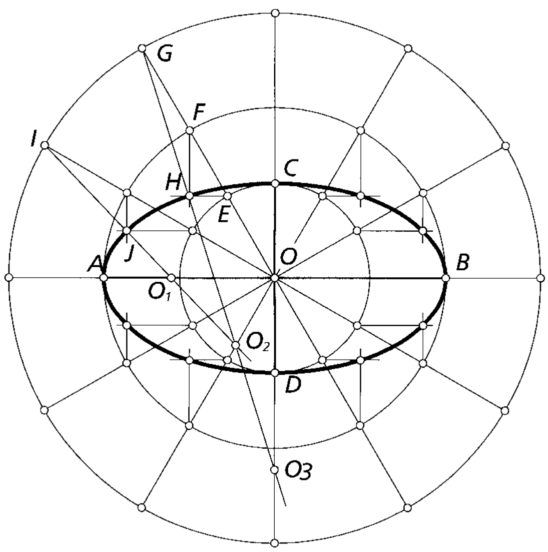


1. Por el punto *C* se trazan las rectas perpendiculares a los lados *AD y DB.*
2. Por el punto *D* se trazan las rectas perpendiculares a los lados *AC y CB.*
3. Los puntos O_1 y O_2, de intersección de las rectas trazadas, son los centros de los arcos pequeños *NQ y MP, y* los puntos *C y D* son los centros O_3 *y*O_4 de los arcos grandes *MN y PQ* que completan el óvalo.

1.5. CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO DE VARIOS CENTROS CONOCIENDO LOS EJES

Dados los ejes *AB y CD* que se cortan perpendicularmente en su punto medio *O*:

1. Se dibujan tres circunferencias con centro en *O* y radios igual al semieje menor, al semieje mayor y a la suma de ambos.
2. Se traza una serie de radios que cortan a las tres circunferencias, por ejemplo, en los puntos *E*, *F* y *G.*
3. Por el punto *E* de intersección con la circunferencia menor se traza una paralela al eje mayor y, al revés, por el punto *F* de intersección con la circunferencia mayor se traza una paralela al eje menor. Ambas paralelas se cortan en el punto *H.*
4. El punto *G* de intersección de la circunferencia exterior con el radio correspondiente se une con el punto *H* hasta cortar al eje *CD* en el punto O_3.



5. Donde la recta *IJ* se corta con la recta *GH* se obtiene el punto O_2. Esta operación se repite con todos los puntos hallados, obteniendo así los centros de los arcos que forman el óvalo.

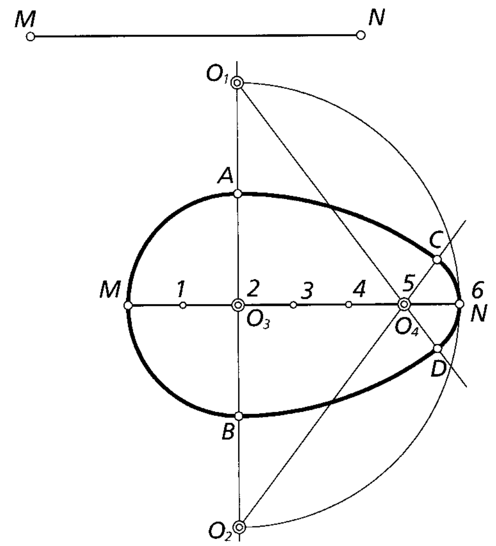
2. OVOIDE

El ovoide es una curva cerrada, plana y convexa formada por cuatro arcos de circunferencia: uno es una semicircunferencia y dos son simétricos. El ovoide tiene un *eje,* llamado a veces eje mayor, *y* un *diámetro,* también llamado eje menor. El ovoide es simétrico respecto a su eje.

2.1. CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO SU EJE

Sea *MN* el eje del ovoide:

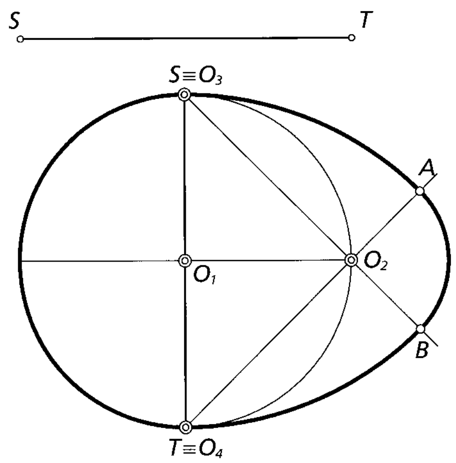
Se divide el eje *MN* en seis partes iguales, numerándolas y llamando O_3 al punto número 2 y O_4 al punto número *5*.



1. Por O_3 se traza la perpendicular a la recta *MN.*
2. Con centro en O_3 y radio O_3M se describe una semicircunferencia hasta cortar a la perpendicular.
3. Con centro en 0_3 *y* radio O_3N se describe otra semicircunferencia que corta a la perpendicular trazada por O_3 en los puntos O_1, *y* 0_2.
4. Los puntos *O*, O_2, O_3 y O_4 son los centros para construir el ovoide.

2.2. CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO SU DIÁMETRO

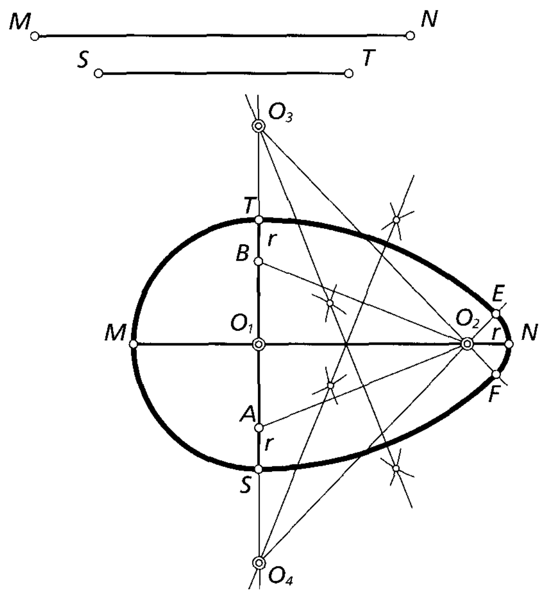
Sea *ST* el diámetro del ovoide:



1. Con diámetro *ST* se traza una circunferencia cuyo centro es el punto O_1.
2. Se dibuja la recta perpendicular a *ST*, que corta a la circunferencia en el punto O_2.
3. Llamando O_3 y O_4 *a* los puntos *S* y *T*, los puntos O, O_2, O_3 y O_4 son los centros de los cuatro arcos del ovoide.

2.3. CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO EL EJE Y EL DIÁMETRO

Sean el eje *MN* y el diámetro ST del ovoide:



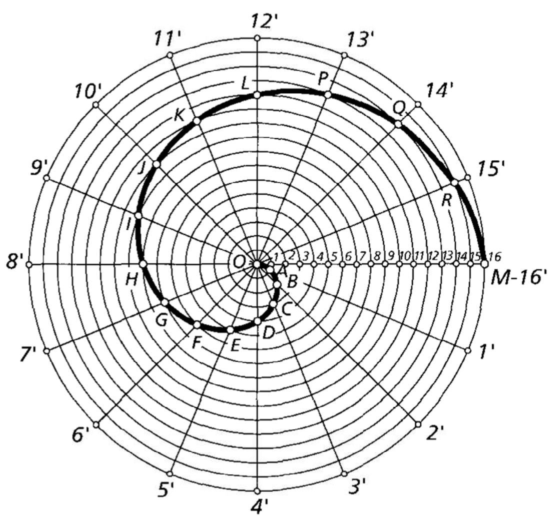
1. Se traza la semicircunferencia de diámetro ST, cuyo centro es el punto 0_1.
2. Se traza por el punto O_1 la recta perpendicular a *ST*, que corta a la semicircunferencia en *M.*
3. Sobre la perpendicular anterior y a partir del punto *M* se lleva el eje mayor *MN.*
4. A partir de los puntos *S*, *T* y *N* se llevan hacia el interior los segmentos *SA*, *TB* y NO_2 iguales al radio del arco menor del ovoide que se elige arbitrariamente.
5. 5 Se trazan las mediatrices de los segmentos $A0_2$ y *BO,* que cortan a la prolongación del diámetro *ST* en los puntos 0_3 y 0_4.
6. Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son los centros para construir el de.

3. ESPIRAL

3.1. CONSTRUCCIÓN DE LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES CONOCIENDO EL PASO

La *espirales* una línea curva que da vueltas alrededor de un punto alejándose de él gradualmente. Se denomina *paso a* la distancia radial que existe entre dos vueltas o espiras consecutivas.

Sea *OM* el paso de la espiral:



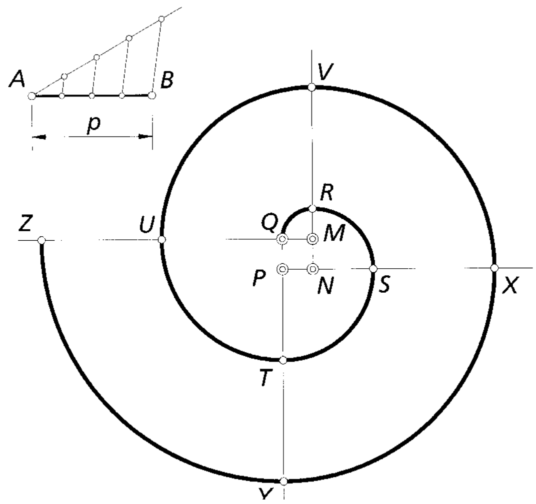
1 Se dibuja la circunferencia con centro en el punto 0 *y* radio *OM.*
2 Se divide esta circunferencia en un número de partes iguales, por ejemplo en 16, numerando cada uno de estos puntos 1', 2, 3', ...
3 Se divide el segmento *OM* en el mismo número de partes iguales en que se haya dividido la circunferencia, es decir 16, numerando a partir del centro todos los puntos 1, 2, 3, ...
4 Se trazan las circunferencias concéntricas con centro en el punto *0 y* radios *01, 02, 03, ...*

5 Los puntos de intersección de estas circunferencias con los radios *01 ', 02', 03', ...* nos dan los puntos *A, B, C, ...* que, unidos a mano alzada o con plantilla, definen la espiral.

3.2. CONSTRUCCIÓN DE UNA VOLUTA DE VARIOS CENTROS DADO EL PASO

La *voluta* es una curva formada por arcos de circunferencia tangentes entre sí, cuyos centros son los vértices de un polígono.

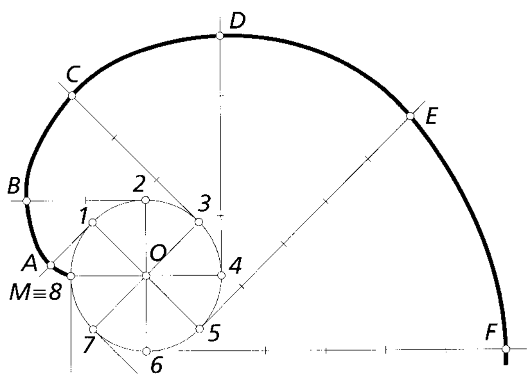
Como ejemplo vamos a construir la voluta de cuatro centros. Sea *p* el paso de la voluta:



1. El segmento AB = p se divide en tantas partes como centros tenga la voluta; en nuestro caso lo dividimos en cuatro partes.
2. Se construye un polígono regular cuyo lado mida lo mismo que una de las divisiones anteriores; en nuestro caso construiremos un cuadrado *MNPQ* de lado *1= p/4.* A continuación prolongamos los lados del polígono.
3. Con centro en un vértice cualquiera, por ejemplo en *M, y* radio *MQ = p/4* se traza un arco hasta cortar a la prolongación de uno de los lados en *R.*
4. Con centro en el vértice *N y* extremo en el punto *R* del arco anterior, se traza el arco *RS* hasta cortar a la prolongación del siguiente lado del cuadrado.
5. Con centro en el siguiente vértice *P* y extremo en el punto *S* del arco anterior, se traza el arco *ST.*
6. Con centro en el siguiente vértice *Q* y extremo en el punto *T* del arco anterior, se traza el arco *TU,* completando así una vuelta. El proceso se sigue hasta completar el número de vueltas deseado.

3.3. CONSTRUCCIÓN DE LA EVOLVENTE DEL CÍRCULO DADO EL RADIO

La *evolvente* del círculo es la curva que genera un punto fijo de una recta tangente a la circunferencia que se desplaza alrededor de la misma sin resbalar.

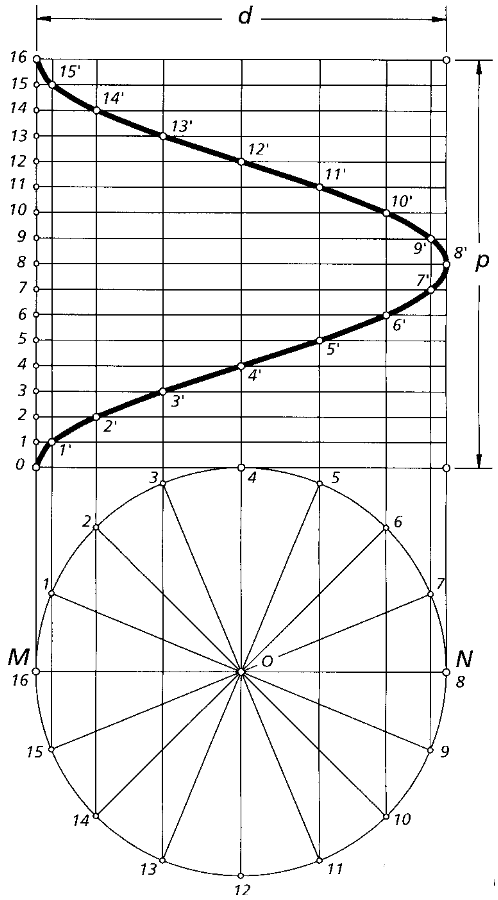


1. Se dibuja una circunferencia de radio dado y se divide en un número de partes iguales, por ejemplo en *8*, numerando cada uno de estos puntos.
2. Por los puntos *1, 2, 3, ...* anteriores se trazan tangentes a

la circunferencia.

3. Sobre la tangente trazada por el punto *1* se lleva una distancia *1A* igual a la longitud del arco *M1*. Dicha longitud se obtiene al rectificar el arco de circunferencia o bien se toma como longitud del arco la de la cuerda *M1,* pues el error que se comete es mínimo.
4. Sobre la tangente trazada por el punto *2* se lleva una distancia *2B* igual a dos veces la longitud del arco *M1.*
5. Sobre la tangente trazada por el punto *3* se lleva una distancia *3C* igual a tres veces la longitud del arco *M1, y* así sucesivamente.
6. Uniendo a mano o con plantilla los puntos *M, A, B, C,* etc., se halla la evolvente que se pide.

4. HÉLICE



La hélice es la curva que genera un punto que se mueve sobre una superficie de revolución de tal forma que, con movimiento uniforme, el punto recorre la generatriz en el mismo tiempo que da una vuelta de 360º. Tiene aplicación tanto en mecánica como en construcción.

Se denomina *paso a* la distancia comprendida entre dos puntos de la curva que ocupan una misma generatriz. Se denomina *espira a* cada una de las vueltas completas que da el punto en la superficie sobre la que se desplaza.

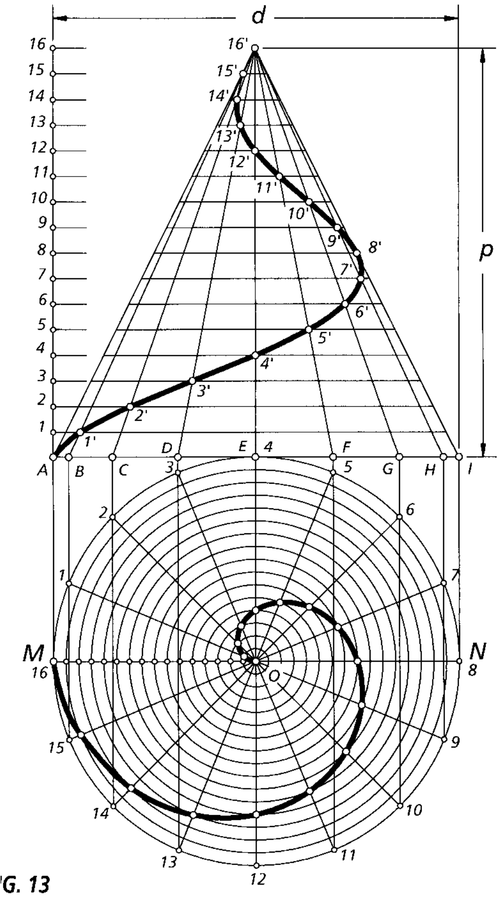
4.1. CONSTRUCCIÓN DE UNA HÉLICE CILÍNDRICA CONOCIENDO EL DIÁMETRO Y EL PASO

Sea del diámetro y p el paso de la hélice:

1. Se dibuja la circunferencia de centro *O* y diámetro *MN = d.*
2. Se dibuja el rectángulo de base el diámetro *d y* de altura el paso *p*. La circunferencia y el rectángulo dibujados son la planta y el alzado de un cilindro recto de revolución.
3. La circunferencia se divide en partes iguales, por ejemplo en 16. numerando cada una de estas divisiones.
4. Se divide la altura del rectángulo en el mismo número de partes iguales en que se haya dividido la circunferencia, en nuestro caso 16, numerando igualmente cada uno de dichos puntos y trazando por ellos rectas paralelas a la base del rectángulo.
5. Por las divisiones de la circunferencia se trazan rectas verticales hasta cortar a las horizontales del rectángulo en los puntos *O*, *1', 2'*, etc., que, unidos a mano alzada o con plantilla, nos definen la hélice.

4.2 CONSTRUCCIÓN DE UNA HÉLICE CÓNICA CONOCIENDO EL DIÁMETRO Y EL PASO

Sea d el diámetro y p el paso de la hélice:



'G. 13

1. Se dibuja una circunferencia de centro *O* y diámetro *MN = d.*
2. Se dibuja un triángulo cuya base es el diámetro *d y* su altura el paso p. La circunferencia y el triángulo dibujados no son más que las vistas en planta y en alzado de un cono recto de revolución.
3. La circunferencia se divide en partes iguales, por ejemplo en 16, numerando cada una de estas divisiones.
4. Se divide la altura del triángulo en el mismo número de partes iguales en que se haya dividido la circunferencia, 16 en nuestro caso, numerando cada uno de dichos puntos y trazando por ellos rectas paralelas a la base del triángulo.
5. Por las divisiones de la circunferencia se trazan rectas verticales hasta cortar a la base del triángulo en los puntos *A, B, C, D, E, F, G, H e I*, que uniremos con el vértice opuesto.
6. Donde se cortan las rectas anteriores con las horizontales correspondientes nos dan los puntos *A, 1 , 2, 3'*, etc., que, unidos a mano o con plantilla, definen la hélice cónica.

CURVAS TÉCNICAS CÍCLICAS

1. CURVAS CÍCLICAS

Son curvas planas que se obtienen por el movimiento de un punto de una circunferencia o de una recta que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia o sobre otra recta.

La recta o circunferencia móvil se denomina *ruleta o generatriz y* la línea o circunferencia sobre la que se mueve se llama *base o directriz.*

La aplicación más importante de estas curvas la tenemos en el dibujo de engranajes.

1.1 TRAZADO DE UNA CICLOIDE

Se llama *cicloide a* la curva que describe un punto *P* de una circunferencia llamada ruleta que rueda sin resbalar sobre una recta llamada base.

Cicloide normal

Sea un punto generador P que se encuentra en la circunferencia ruleta de centro *O*:

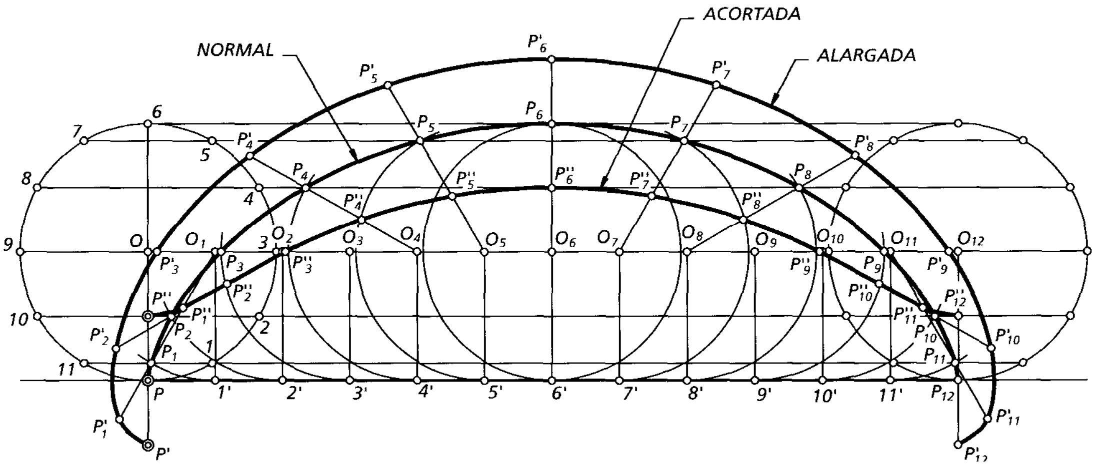
1. Sobre la recta base, a partir del punto *P*, se lleva una longitud P-P_{12} igual a la longitud de la circunferencia ruleta, es decir, se rectifica la ruleta de centro *O* y radio *OP* sobre la recta base.
2. Se divide el segmento P-P_{12} *y* la ruleta en el mismo número de partes iguales, por ejemplo 12.
3. Por cada uno de los puntos de división de la ruleta se dibujan rectas paralelas a la base.
4. Por los puntos de división *1', 2', 3', 12' se* trazan las perpendiculares a la recta base, hasta cortar en O_1, O_2, O_3, ..., O_{12} *a* la recta paralela trazada por el centro *O* de la ruleta.
5. Se dibujan las circunferencias de centro O_1, O_2, ... O_{12} y donde se cortan con las correspondientes rectas horizontales paralelas a la base se van obteniendo los puntos P_1, P_2, ..., P_{12} de la cicloide normal.

Cicloide acortada y alargada

Sean los puntos *P'* y *P"*, ligados a la ruleta, uno exterior y otro interior a la misma:

1. Se construye, sin trazarla, la cicloide normal tal como se ha explicado antes.
2. Sobre cada uno de los segmentos O_1P_1, O_2P_2, ..., $O_{12}P_{12}$ *y a* partir de los centros O_1, O_2, ..., O_{12} se llevan las distancias fijas *OP'* y *OP",* obte-

niendo así los puntos P'_1, P_2, ..., P'_{12} de la cicloide acortada y los puntos P''_1, P'_2, ..., P''_{12} de la cicloide alargada.



1.2. TRAZADO DE UNA EPICICLOIDE

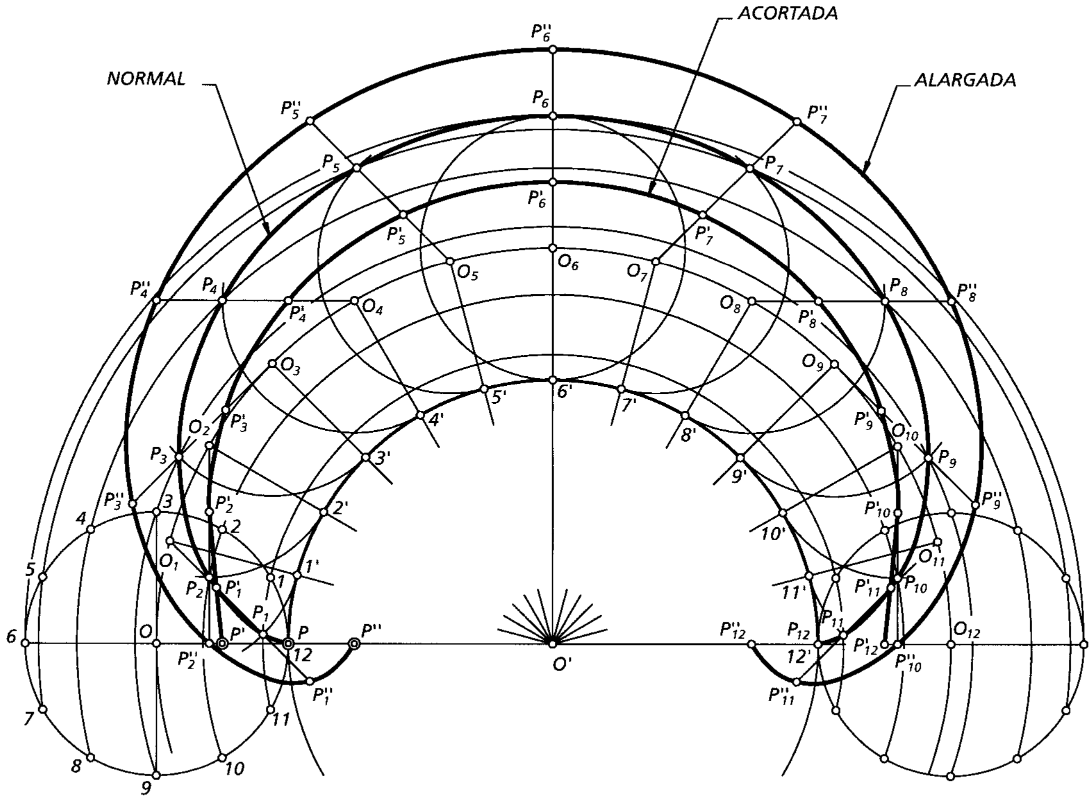
Se llama *epicicloide a* la curva plana que describe un punto P de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre el exterior de otra circunferencia que es la base.

Epicicloide normal

Sea la circunferencia de centro *0 y* radio *OP* la ruleta y la circunferencia de centro *O'* y radio *O'P* la base. El punto generador es el punto *P* de la circunferencia.

1. Se divide la ruleta de centro *O* en un número de partes iguales, por ejemplo 12, numerando los puntos de división *1, 2, 3, ..., 12.*
2. Se rectifica el arco *P1* de la circunferencia de centro *O* correspondiente a una de estas divisiones y a continuación se halla el arco *P1'* de la circunferencia de centro *O'* que corresponde a dicha longitud (véase rectificación de un arco).
3. Estas divisiones se trasladan sobre la base tantas veces como se haya dividido la ruleta, numerando a continuación los puntos: *1', 2', 3; ..., 12'.*
   Es interesante comenzar por una posición central 6' y trasladar la magnitud anterior en los dos sentidos, de forma simétrica.
4. Con centro en *O'*, se trazan los arcos que pasan por cada uno de los puntos *1, 2, 3, ..., 12* en que se ha dividido la ruleta inicialmente.
5. Se traza el arco de centro *O'* y radio *O´O*, que al cortarse con la prolongación de los radios *O'1', O'2', O'3'*, ..., *O'12'* se obtienen los puntos O_1, O_2, O_3, ..., 0_{12}, centros de las sucesivas posiciones que va adoptando la ruleta al rodar.
6. El punto P_1 de la curva se obtiene al cortarse la circunferencia de centro O_1 *y* radio $O_1 1'$ con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto *1.* El punto P_2 se obtiene al cortarse la circunferencia de

centro O_2 *y* radio $O_2 2'$ con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto 2. De forma análoga se obtienen los puntos P_3, P_4,.... P_{12}.



Epicicloides acortada y alargada

Sean los puntos *P'* y *P",* ligados solidariamente a la ruleta, uno interior y otro exterior a la misma:

1. Se construye, sin trazarla, la epicicloide normal tal como se ha explicado anteriormente.
2. Sobre los segmentos O_1P_1, O_2P_2, 0_3P_3, ..., $012P12_i$ *y* a partir de los centros 0,, 0_2, 0_3, ..., 0_{12r} se llevan las distancias fijas *OP'* y *OP",* obteniendo así los puntos P'_1, P'_2, P'_3, ..., P'_{12} de la epicicloide acortada *y* P'_1, P'_2, P'_3, ..., P''_{12} de la epicicloide alargada.

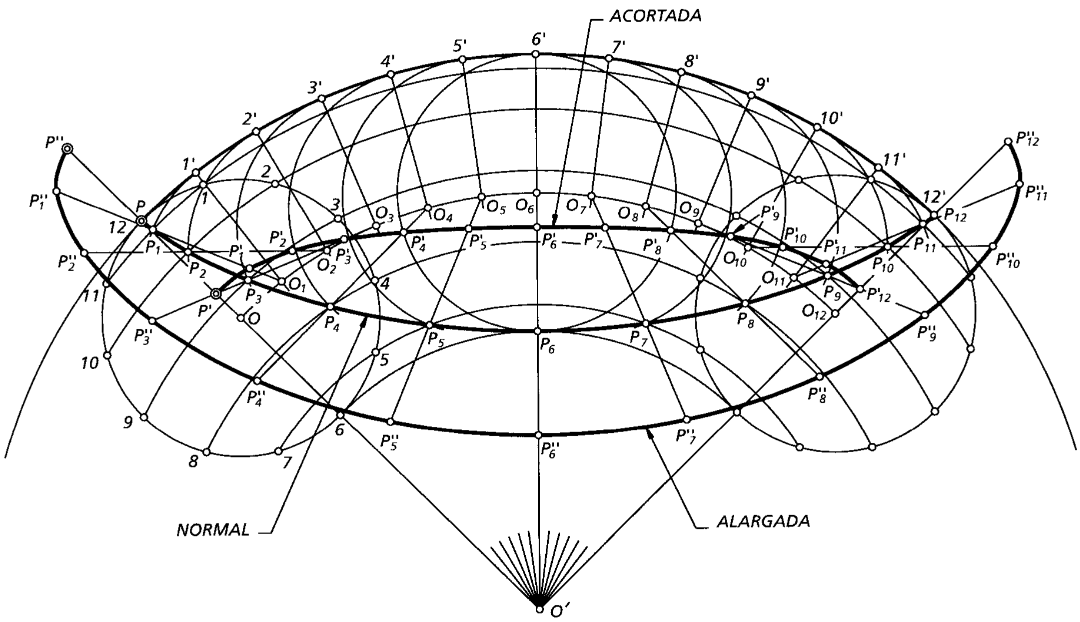
1.3. TRAZADO DE UNA HIPOCICLOIDE

Se llama *hipocicloide a* la curva plana que describe un punto *P* de una circunferencia ruleta que rueda sin resbalar sobre el interior de otra circunferencia que es la base.

Hipocicloide normal

Sea la circunferencia de centro *O* y radio *OP* la ruleta y sea la circunferencia de centro *O'* y radio *O'P* la base. El punto generador es el punto *P* de la circunferencia.

1. Se divide la ruleta de centro *O* en un número de partes iguales, por ejemplo 12, numerando los puntos de división *1, 2, 3, ..., 12.*
2. Se rectifica el arco *P1* de la circunferencia de centro *O* correspondiente a una de estas divisiones y a continuación se halla el arco *P1'* de la circunferencia de centro *O'* que corresponde a dicha longitud (véase rectificación de un arco).
3. Estas divisiones se trasladan sobre la base tantas veces como se haya dividido la ruleta, numerando a continuación los puntos: *1', 2', 3', ..., 12'.*
   Es interesante comenzar por una posición central *6'* y trasladar la magnitud anterior en los dos sentidos, de forma simétrica.



4. Con centro en *O´*, se trazan los arcos que pasan por cada uno de los puntos *1, 2, 3, ..., 12* en que se ha dividido la ruleta inicialmente.
5. Se traza el arco de centro *O'* y radio *O'O,* que al cortarse con los radios *O'1', O'2', O'3',* ..., *O'12'se* obtienen los puntos O_1, O_2, O_3, ..., O_{12}, centros de las sucesivas posiciones que va adoptando la ruleta al rodar.
6. El punto *P*, de la curva se obtiene al cortarse la circunferencia de centro 0, y radio $O_1 1'$ con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto *1*. El punto P_2 se obtiene al cortarse la circunferencia de centro O_2 y radio $O_2 2'$ con el arco concéntrico con la base que pasa por el punto *2*. De forma análoga se obtienen los puntos P_3, P_4, ... , P_{12}.

Hipocicloides acortada y alargada

Sean los puntos *P'* y *P"*, ligados solidariamente a la ruleta, uno interior y otro exterior a la misma:

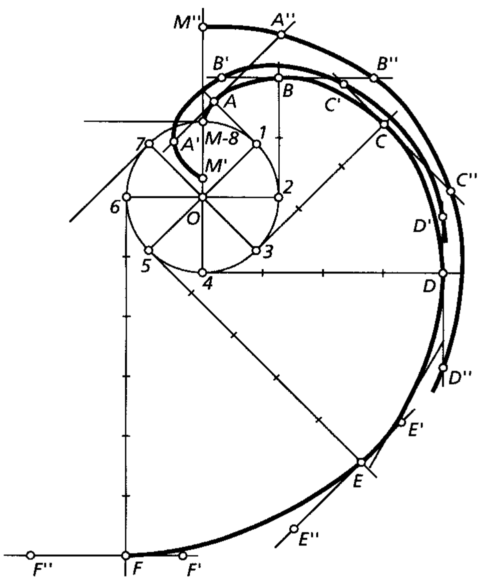
1. Se construye, sin trazarla, la hipocicloide normal tal como se ha explicado antes.

2. Sobre los segmentos O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3, ..., $O_{12}P_{12}$, *y* a partir de los centros O_1, O_2, O_3,..., O_{12}, se llevan las distancias fijas *OP'* y *OP"*, obteniendo así los puntos P'_1, P_2, P'_3..., P'_{12} de la hipocicloide acortada y P''_1, P''_2, P''_3, ..., P''_{12} de la hipocicloide alargada.

2. OTRAS CURVAS I

2.1. EVOLVENTE DE LA CIRCUNFERENCIA

La evolvente del círculo es la curva que genera un punto fijo de una recta tangente a la circunferencia que se desplaza alrededor de la misma sin resbalar.



1. Se dibuja una circunferencia de radio dado y se divide en un número de partes iguales, por ejemplo en 8, numerando cada uno de estos puntos.
2. Por los puntos *1, 2, 3, …* anteriores se trazan tangentes a la circunferencia.
3. Sobre la tangente trazada por el punto *1* se lleva una distancia *1A* igual a la longitud del arco *M1.* Dicha longitud se obtiene al rectificar el arco de circunferencia o bien se toma como longitud del arco la de la cuerda *M1,* pues el error que se comete es mínimo.
4. Sobre la tangente trazada por el punto *2* se lleva una distancia *2B* igual a dos veces la longitud del arco *M1.*
5. Sobre la tangente trazada por el punto *3* se lleva una distancia *3C* igual a tres veces la longitud del arco *M1*, y así sucesivamente.
6. Uniendo a mano o con plantilla los puntos *M, A, B, C,* etc., se ha evolvente que se pide.

Evolventes acortada y alargada

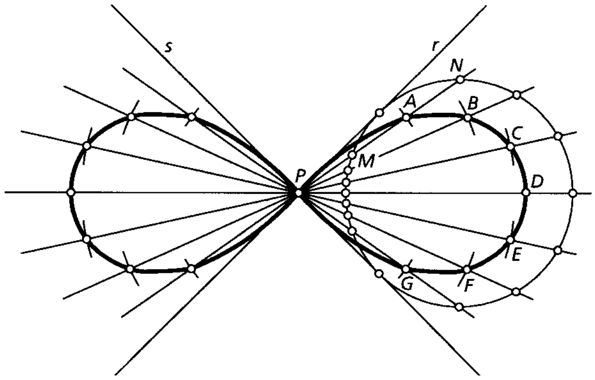
Sean los puntos *M'* y *M",* ligados solidariamente a la tangente, situados sobre la perpendicular a la misma por el punto *M,* uno a cada lado de la tangente:

1. Se construye, sin trazarla, la evolvente normal tal como se ha explicado anteriormente.
2. Por los puntos A, *B, C, …* se trazan las perpendiculares a las tangentes, llevando a cada lado las distancias *AA' = BB'= CC'= … = MM'* y *AA"= BB"= CC"= … = MM",* obteniendo así los puntos *A', B', C', …* de la evolvente acortada y los puntos *A", B", C”, …* de la evolvente

alargada.

2.2. LEMNISCATA DE BERNOULLI

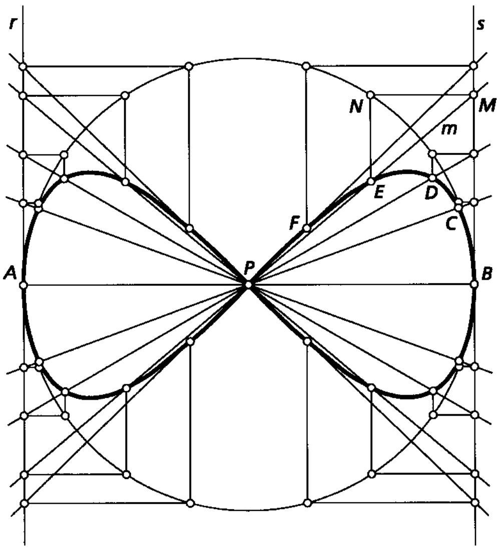
Sean las rectas *r* y *s* perpendiculares entre sí:



1. Se traza una circunferencia cualquiera tangente a las rectas *r* y *s*.
2. Desde el punto *P* de intersección de las rectas *r* y *s* se trazan rectas secantes a la circunferencia.
3. En cada una de las rectas secantes y haciendo centro en el punto *P,* se marcan las distancias *PA = MN.* Los puntos *A, B, C,…* definen la lemniscata de Bernoulli.

2.3. LEMNISCATA DE GEROMO

Dado el diámetro *AB* de la curva:



1. Se dibuja la circunferencia de diámetro *AB* y por ambos extremos se trazan las rectas *r* y *s* tangentes a la circunferencia.
2. Desde el centro *P* se trazan rectas que cortan a *r* y *s;* por ejemplo, la recta m corta a *s* en el punto *M.*
3. Por el punto *M* se traza la perpendicular a la recta *s* hasta cortar a la circunferencia en el punto *N.*
4. Por *N* se dibuja la paralela a la tangente *s* hasta cortar a la recta *m* en el punto *E* de la curva.

CURVAS CÓNICAS

1. INTRODUCCIÓN

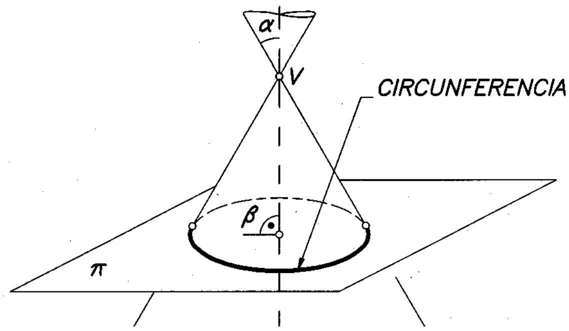
Se llaman curvas cónicas a las curvas que se obtienen de la intersección de una superficie cónica por un plano.

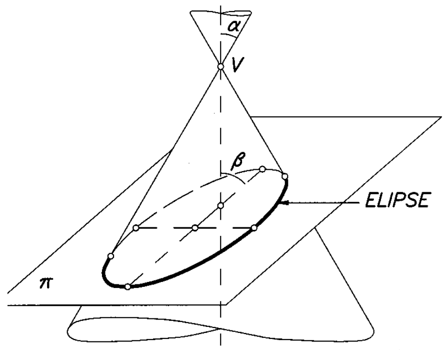
Secciones de un cono

Supongamos un cono de revolución de dos ramas; según sea la posición de un plano secante respecto del eje del cono, en relación con el ángulo del vértice, se obtienen las siguientes curvas:

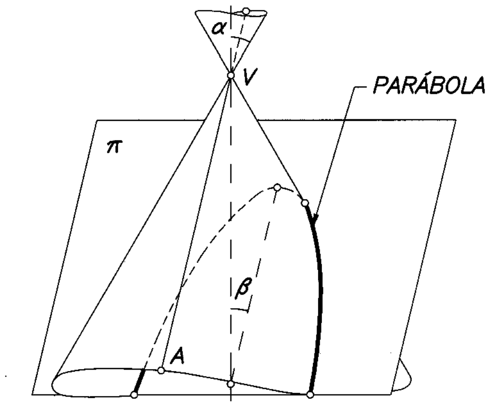
Circunferencia
Cuando el plano secante es perpendicular al eje de la superficie cónica, y no pasa por el vértice, la sección es una circunferencia *(ß = 90º)*.

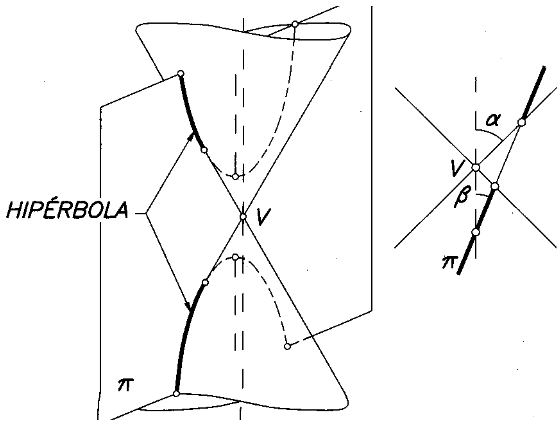
Elipse
Si el plano secante forma con el eje de la superficie cónica un ángulo mayor que el semiángulo en el vértice del cono, el plano corta a todas las generatrices y no pasa por el vértice, entonces la sección es una curva cerrada que se denomina elipse *($\alpha < \beta$)*.





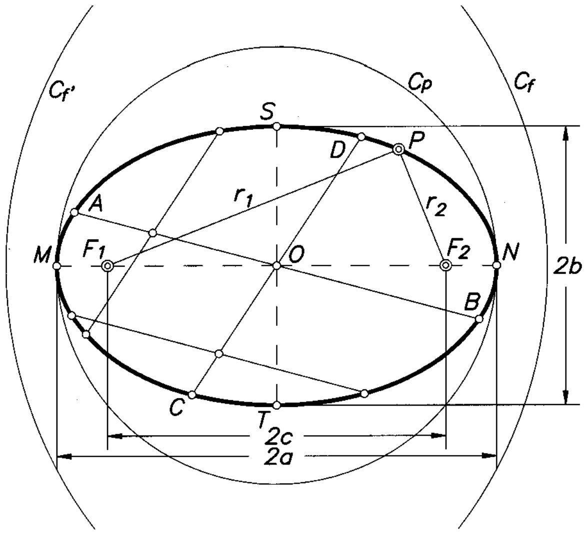
Parábola
Si el plano secante forma con el eje del cono el mismo ángulo que el semiángulo en el vértice o, lo que es lo mismo, es paralelo a una generatriz, la curva que resulta es abierta y con un punto en el infinito llamada parábola *($\alpha = \beta$)*.
Hipérbola
Cuando el plano secante forma con el eje del cono un ángulo menor que el semiángulo en el vértice, entonces el plano corta a las dos ramas del cono y la sección es una curva abierta de dos ramas que se llama hipérbola *($\alpha > \beta$)*.





2. ELIPSE

2.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES



La elipse es una curva cerrada y plana, *lugar geométrico de los puntos que cumplen con la condición de que la suma de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante e igual a 2a,* siendo *2a* la longitud del eje mayor *MN* de la elipse.

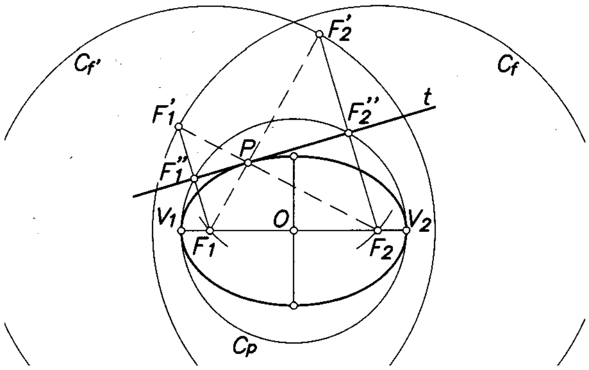
Propiedades

- La elipse tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en el punto O, centro de la curva.
- *Simetría*: la elipse es simétrica respecto a los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O.
- *Ejes*: al eje mayor *MN* se le llama eje real y vale *2a* y el eje menor *2c* es el eje virtual y vale *2b.*
- *Distancia focal*: la distancia focal F_1F_2 vale *2c.* Los focos están siempre en el eje real.
- *Radios vectores*: son las rectas PF_1 y PF_2 que unen cada punto de la elipse con los focos.
- *Circunferencia principal:* es la que tiene por centro el de la elipse y diámetro *2a.*
- *Circunferencias focales*: tienen como centro los focos y de radio *2a.* Siempre se verifica que $a^2 = b^2 + c^2$.
- *Diámetros conjugados*: se llaman así a todo par de diámetros que cumplen con la condición de que cualquier recta secante paralela a uno de ellos queda dividida en dos partes iguales por el otro.

Rectas tangentes :

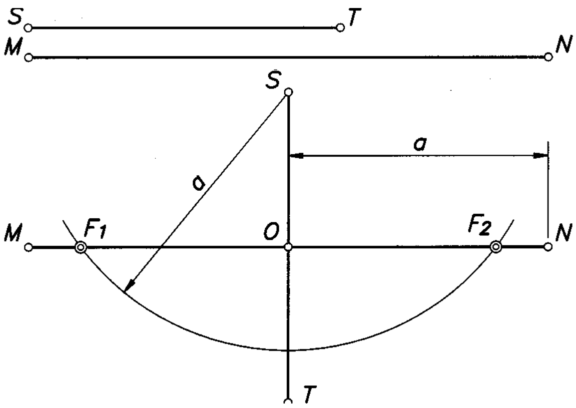
- Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la elipse pertenecen a la circunferencia principal.

- El punto simétrico de un foco respecto de cualquier recta tangente a la elipse pertenece a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.



2.2 DETERMINACIÓN DE LOS FOCOS CONOCIENDO LOS EJES

Sean *MN* y *ST* los ejes de una elipse



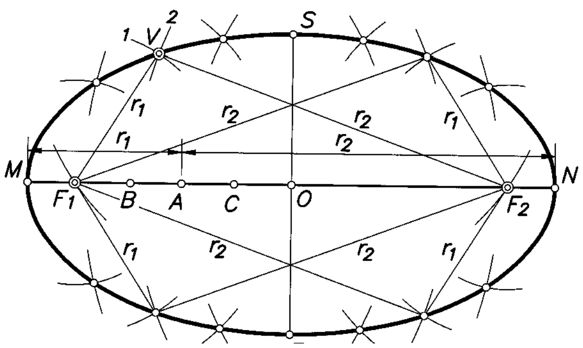
1. Se trazan ambos ejes perpendiculares entre sí cortándose en su punto medio.
2. Se traza un arco de circunferencia con centro en uno de los extremos *S* del eje menor y radio el semieje mayor *ON* hasta cortar al eje *MN* en los puntos F_1 y F_2 que son los focos.

2.3 CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE CONOCIENDO LOS EJES

Método por puntos

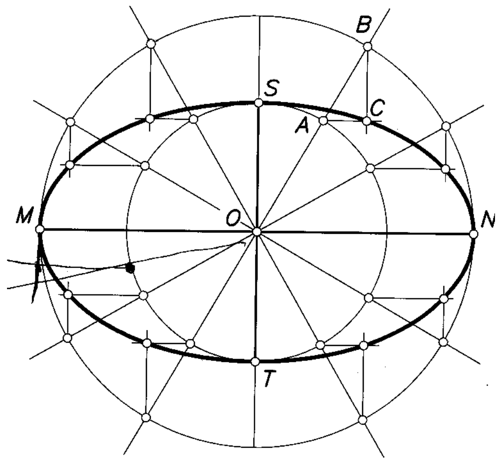
Sean los ejes *MN* y *ST* :

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 como ya se ha explicado.
2. Se toma un punto *A* cualquiera del eje mayor, situado entre uno de los focos y el centro, y con radio *MA* y centro en F_1 se traza el arco *1* y con radio *NA* y centro en F_2 se traza el arco *2*; estos dos arcos se cortan en el punto *V* de la elipse.
3. Repitiendo la misma operación con otros puntos *B, C*, etc., se van determinando puntos de la elipse que posteriormente se unen a mano alzada o con plantilla.



Método por afinidad

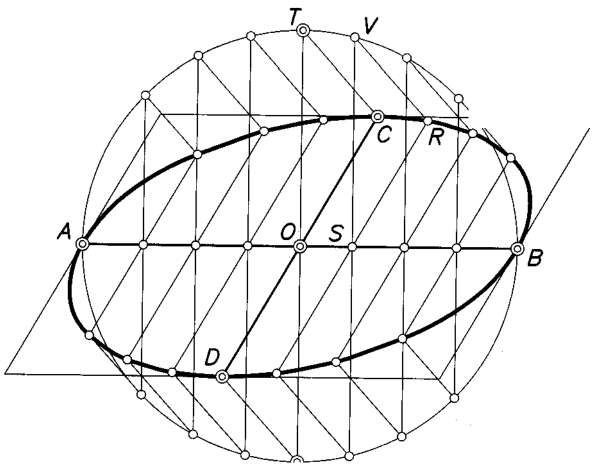
Sean los ejes *MN* y *ST*:



1. Se trazan dos circunferencias cuyos diámetros sean iguales al eje mayor y al eje menor respectivamente.
2. *Se* traza un radio cualquiera que corte a las dos circunferencias en dos puntos *A* y *B.*
3. Por el punto *A* de intersección con la circunferencia menor se traza la recta paralela al eje mayor *MN.*
4. Por el punto *B* de intersección con la circunferencia mayor, se traza la paralela al eje menor *ST.*
5. El punto C de intersección de las dos paralelas es un punto de la elipse.
6. Se repite la operación con tantos radios como se desee, determinando así diversos puntos de la elipse, que posteriormente se unen a mano alzada o con plantilla.

2.4 CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE CONOCIENDO DOS DIÁMETROS CONJUGADOS

Sean *AB* y *CD* dos diámetros conjugados de la elipse:

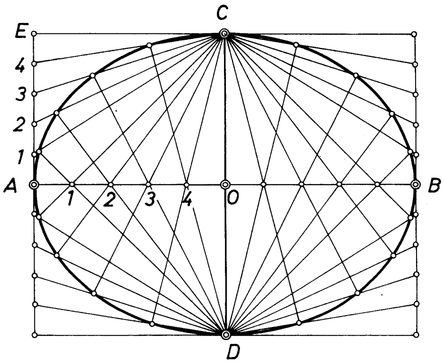


1. Se traza la circunferencia con diámetro *AB* y centro en el punto O.
2. Por el punto O se dibuja la perpendicular al diámetro *AB* que corta a la circunferencia en *T.*
3. Se toma un punto *S* cualquiera del diámetro *AB,* trazando por él la paralela a *OT* hasta cortar a la circunferencia en el punto *V.*
4. Se trazan dos rectas paralelas, una a *OC* por el punto *S* y otra a *TC* por el punto *V;* ambas se cortan en el punto *R* de la elipse.
5. Repitiendo la misma operación con otros puntos del diámetro *AB* se van determinando puntos de la elipse, que posteriormente se unen con plantilla o a mano alzada.

Para mejor entendimiento diremos que cada punto de la elipse se obtiene por construcción de triángulos semejantes al *OTC,* como el *SVR,* etc.

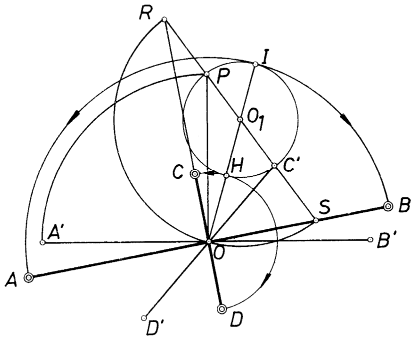
2.5 CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR HACES PROYECTIVOS CONOCIENDO DOS EJES

1. Se construye el rectángulo *OAEC y* se dividen los segmentos *OA y AE* en el mismo número de partes iguales, cinco en la figura.
2. Los rayos *C1, C2 C3 y C4* se cortan respectivamente con los rayos *D1, D2, D3 y D4* en puntos de la elipse.

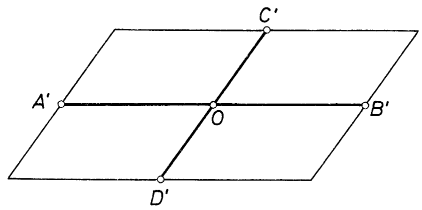


2.6 HALLAR LOS EJES DE LA ELIPSE A PARTIR DE LOS EJES CONJUGADOS

1. Por el centro 0 se traza la perpendicular *a* A'B' *y* se lleva *OP = OA'.*
2. *S*e une *P* con C' y se traza la circunferencia de centro 0_1 y diámetro *PC'.*
3. *C*on centro en 0_1 y radio 0_10 se traza la semicircunferencia ROS.
4. Uniendo 0 con R y S se obtienen los ejes de la elipse en posición.
5. La magnitud de ellos es: *a = 01 y b =* OH, que se llevan sobre cada uno de ellos respectivamente.



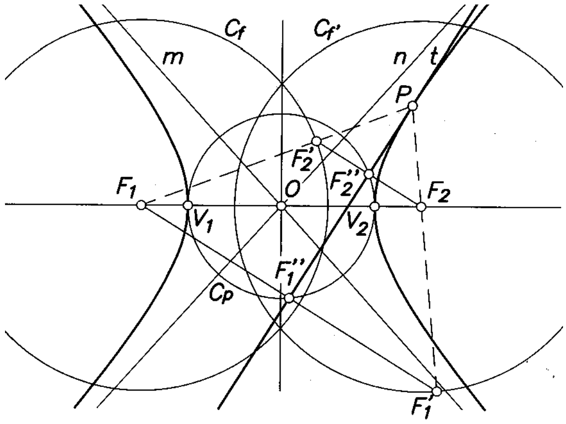
La figura de la izqierda indica que las tangentes a una elipse en puntos que son extremos de una pareja de diámetros conjugados, son paralelas a los diámetros conjugados respectivos, formándose un romboide circunscrito a la elipse. Las tangentes en C' y D' son paralelas al diámetro A 'B' *y* las tangentes en A ' *y B'* son paralelas al diámetro C'D'.



3. HIPÉRBOLA

3.1 DEFINICION y PROPIEDADES

La hipérbola es una curva plana, abierta, con dos ramas y se define como *el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2' llamados focos, es constante e igual a 2a,* siendo *2a* el valor del eje real V_1V_2 .



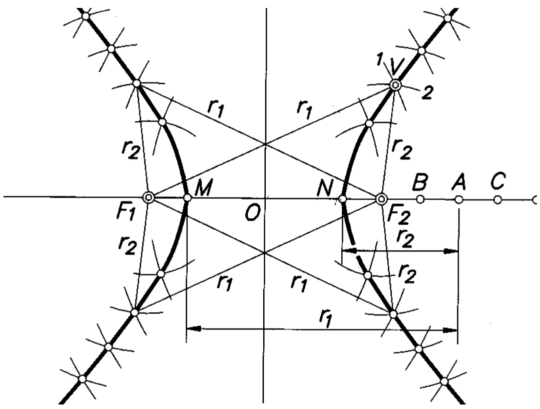
Propiedades

- La hipérbola tiene dos ejes perpendiculares que se cortan en su punto medio O, centro de la curva.
- *Simetría*: la hipérbola es simétrica respecto de los dos ejes y, por tanto, respecto del centro O.
- *Ejes*: el eje mayor V_1V_2 se llama eje real y vale *2a* y el eje menor, perpendicular al anterior en su punto medio O, se llama eje virtual.
- *Distancia focal*: la distancia focal F_1F_2 vale 2c. Los focos están siempre en el eje real.
- *Radios vectores*: son las rectas PF_1 y PF_2 que unen un punto de la curva con los dos focos, cumpliéndose que $PF_1 - PF_2 = 2a$.
- *Circunferencia principal*: es la que tiene por centro el de la hipérbola y diámetro *2a.*
- *Circunferencias focales*: tienen como centros los focos y radio *2a.*
- Siempre se verifica que: $c^2 = a^2 + b^2$.

Rectas tangentes

- Las proyecciones de los focos sobre cualquier recta tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia principal.
- El punto simétrico de un foco respecto de cualquier tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.
- Las *asíntotas* de la hipérbola, *m* y *n,* son las rectas tangentes a la curva en los puntos del infinito. Son simétricas respecto de los ejes y pasan por el centro *O*.
- Se llama *hipérbola equilátera* a la hipérbola cuyas asíntotas forman 45º con los ejes.

3.2. CONSTRUCCION DE LA HIPERBOLA CONOCIENDOLOS VERTICES Y LOS FOCOS



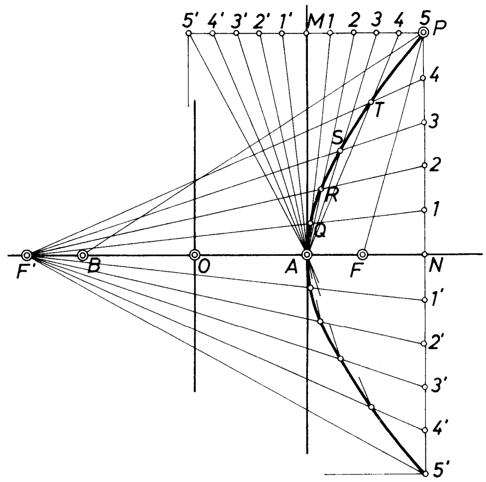
Los datos son: $MN = 2a$ y F_lF_2 = 2c.

2. Se elige un punto *A* cualquiera en el eje real *MN,* situado a la derecha del foco de la derecha o a la izquierda del foco de la izquierda.
3. Con centros en F_1 y F_2 Y radios *MA* y *NA* respectivamente se trazan los arcos *1* y 2 que se cortan en el punto *V* de la curva. Se verifica que: $VF_1 - VF_2 = 2a = MN$.
4. Repitiendo la misma operación con otros puntos *B,* C, etc., se obtienen puntos que, unidos posteriormente con plantilla o a mano alzada, nos definen la hipérbola.

3.3 CONSTRUCCION DE LA HIPERBOLA POR HACES PROYECTIVOS

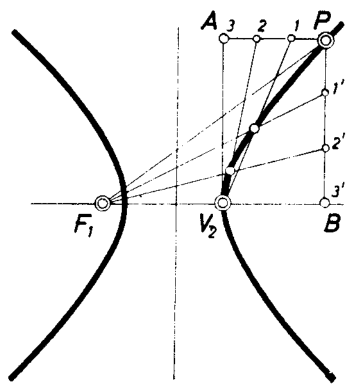
Se conocen *2a = AB y 2c = FF'.*

1. Se halla un punto cualquiera *P* de la curva y se construye el rectángulo *AMPN.*
2. Se dividen los lados *MP y PN* en un número cualquiera de partes iguales que se unen con los puntos *A y F',* respectivamente.
3. Los puntos de intersección de los rayos homónimos u homólogos de estos dos haces son puntos de la hipérbola.
4. Así, *F'-4 y A-4* se cortan en el punto *T* de la curva; de la misma forma se construye la parte inferior de la curva.



3.4 CONSTRUIR UNA HIPÉRBOLA DADO UN FOCO, UN VÉRTICE V Y UN PUNTO P DE LA CURVA.

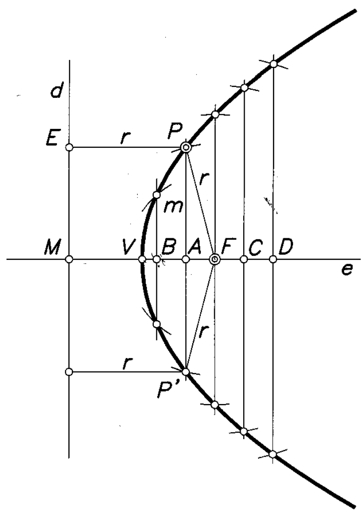
1. Se traza por V_2 y P perpendiculares a la recta F, V_2, eje de la hipérbola, así como una paralela por P, construyendo con ello el paralelogramo rectángulo APV_2B.
2. Dividimos los lados AP y PB en igual número de partes iguales (1, 2, 3..., 1', 2', 3'..., respectivamente).
3. Basta unir el foco F, dado con las divisiones marcadas sobre PB y el vértice V_2 con las marcadas sobre A P, determinando sus mutuas intersecciones puntos de la curva.



4. PARÁBOLA

4.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

La parábola es una curva plana, abierta y de una rama. Se define como *el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F llamado foco, y de una recta fija d llamada directriz*.

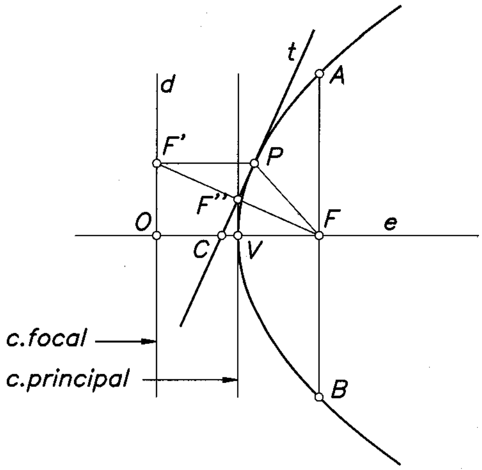


Propiedades

- La parábola tiene un eje perpendicular a la directriz.
- La parábola tiene un vértice *V* y un foco *F* situados en el eje.
- El vértice, como cualquier otro punto de la parábola, equidista de la directriz y del foco.
- *Simetría:* la parábola es simétrica respecto

del eje.
- *Radios vectores*: son las rectas *PF* y *PF'* que unen un punto con el foco y con la directriz.
- *Circunferencia principal*: es la recta tangente en el vértice; por tanto tiene radio infinito.
- *Circunferencia focal*: es la propia directriz; por tanto tiene radio infinito.
- *Perímetro 2p*: es la longitud *AB* de la cuerda perpendicular al eje en el foco *F.*

Rectas tangentes
- La proyección del foco sobre una tangente pertenece
- a la circunferencia principal, es decir, a la tangente en el vértice.
- La directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco *F* respecto de cada tangente.
- El foco *F* equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde ésta corta al eje de la parábola *FP = FC.*



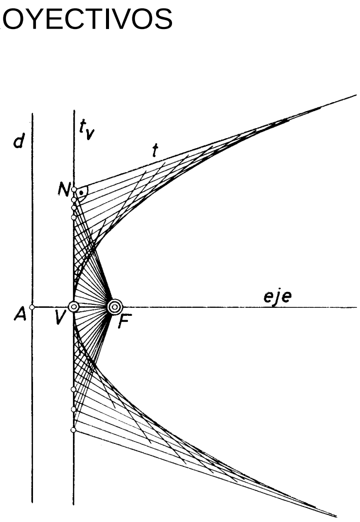
4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA PARABOLA CONOCIENDO EL FOCO Y LA DIRECTRIZ

Los datos son: la directriz *d,* el eje *e* y el foco *F* :

1. El vértice *V* es el punto medio del segmento *MF.*
2. Se toma un punto cualquiera *A* del eje y se traza la recta m perpendicular al eje.
3. Con centro en el foco *F* y radio *AM* se traza un arco que corta a la perpendicular *m* en los puntos *P* y *P',* , puntos de la parábola. Se cumple que *PF = PE.*
4. Repitiendo la misma operación con otros puntos *B,* C, etc., se obtienen puntos que, unidos posteriormente a mano alzada o con plantilla, nos determinan la parábola.

4.2 CONSTRUCCIÓN DE LA PARABOLA POR HACES PROYECTIVOS

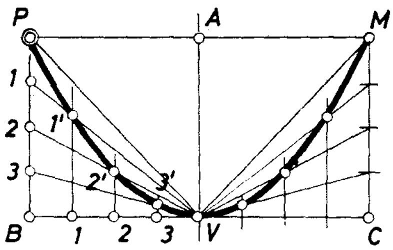
1. Se traza la tangente en el vértice, *VN, y* la paralela *PN* al eje.
2. Se divide PA$^{T'}$ *y VN* en un número de partes iguales; el rayo *V-5* y la paralela por *5* al eje se cortan en el punto M de la curva.
3. De la misma forma se han obtenido otros puntos de la curva.



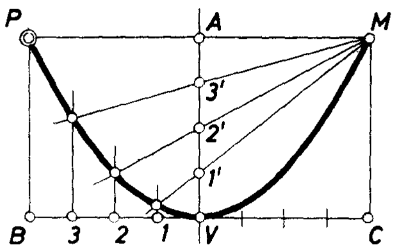
4.3 CONSTRUIR UNA PARÁBOLA CONOCIENDO EL EJE, EL VÉRTICE V Y UN PUNTO P DE LA CURVA

Primer método.

1. Por el punto dado P y el vértice V se trazan perpendiculares al eje.
2. Se halla el punto simétrico de P respecto al eje, que será M y por ellos trazamos paralelas al eje, quedando así construido un cuadrilátero rectángulo.
3. Se dividen los lados menores del rectángulo en un número cualquiera de partes iguales y en el doble de partes, también iguales entre sí, uno de los lados mayores.
4. Se une V con todos los puntos de división señalados en los lados menores y por las divisiones del lado mayor se trazan paralelas al eje.
5. Las intersecciones de las rectas de igual numeración nos determinan en 1', 2', etc., puntos pertenecientes a la parábola, la cual se obtiene uniéndolos a mano alzada.



Método 1



Método 2

Segundo método.

1. Se procede como en el caso anterior con el punto M, simétrico del dado P respecto al eje, construyendo el cuadrilátero rectángulo PMBC.
2. Se divide en igual número de partes iguales los segmentos BV y AV, trazando por 1, 2, 3, etc., paralelas al eje y uniendo el punto M con 1', 2', 3', etc.
3. Las intersecciones entre rectas de igual numeración nos determinan puntos de la curva.

5. PROPIEDADES DE LAS RECTAS TANGENTES

5.1. ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante.

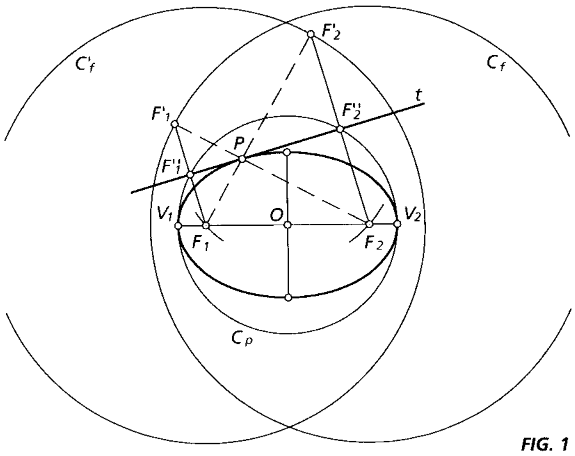
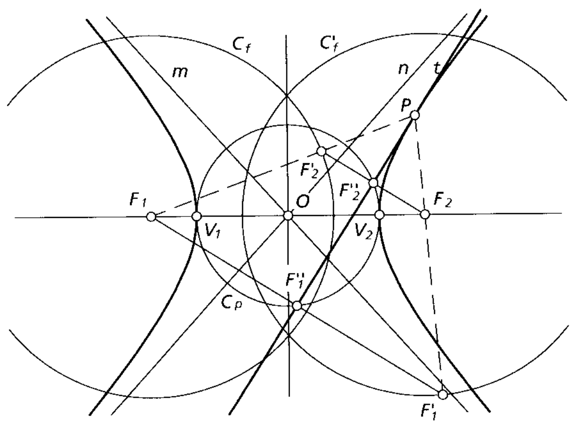


FIG. 1

- Las proyecciones de los focos sobre una tangente a la elipse están en la circunferencia principal.
- El punto simétrico de un foco respecto de cualquier recta tangente a la elipse pertenece a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.

5.1. HIPÉRBOLA

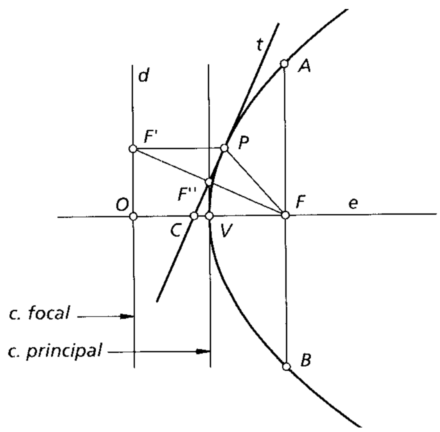
La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2, llamados focos, es constante.



- Las proyecciones de los focos sobre cualquier tangente a la hipérbola pertenecen a la circunferencia principal.
- El punto simétrico de un foco respecto de cualquier tangente a la hipérbola pertenece a la circunferencia focal cuyo centro es el otro foco.
- Las asíntotas, *m* y *n*, son las rectas tangentes a la hipérbola en los puntos del infinito. Son simétricas respecto a los ejes y pasan por el centro.

5.2. PARÁBOLA

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo *F* llamado foco, y de una recta fija *d* llamada directriz.



- La proyección del foco sobre una tangente pertenece a la circunferencia principal.
- La directriz es el lugar geométrico de los puntos simétricos del foco *F* respecto de cada tangente.

- El foco *F* equidista del punto de tangencia de una tangente y del punto donde esta corta al eje de la parábola *FP* = *FC*.

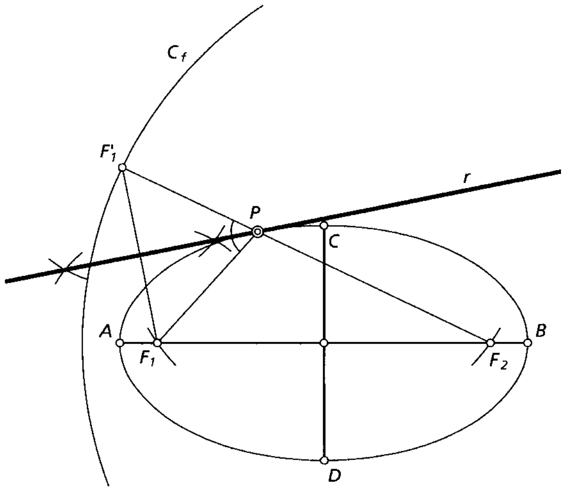
6. ELIPSE

6.1. RECTAS TANGENTES A UNA ELIPSE

Recta tangente en un punto de la elipse

Dada la elipse cuyos ejes son *AB* y *CD* y un punto *P* cualquiera de la misma:

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 mediante el arco de centro *C* y radio *AB/2*.
2. Se traza la circunferencia focal *C*, correspondiente a uno de los dos focos, por ejemplo F_2.
3. Se une el foco F_2 con el punto *P* hasta cortar a *C*, en el punto *F'*,, simétrico del otro foco *F*, respecto de la tangente.
4. La mediatriz *r* del segmento $F_1F'_1$ es la recta tangente buscada.



La recta *r* también puede hallarse trazando la bisectriz del ángulo $F_1PF'_1$.

Rectas tangentes desde un punto exterior

Dada la elipse cuyos ejes son *AB* y *CD* y un punto *P* exterior:

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 mediante el arco de centro *C* y radio *AB/2*.
2. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos F_2.
3. Con centro en *P* se traza el arco de circunferencia que pasa por el otro foco F_1 la cual corta a *C*, en los puntos *G* y *H*.
4. Las mediatrices *r* y *s* de los segmentos *GF*, y HF_1 respectivamente son las tangentes buscadas.
5. Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos *G* y *H* con el fc y cortar a las tangentes en los puntos *I* y *J.*

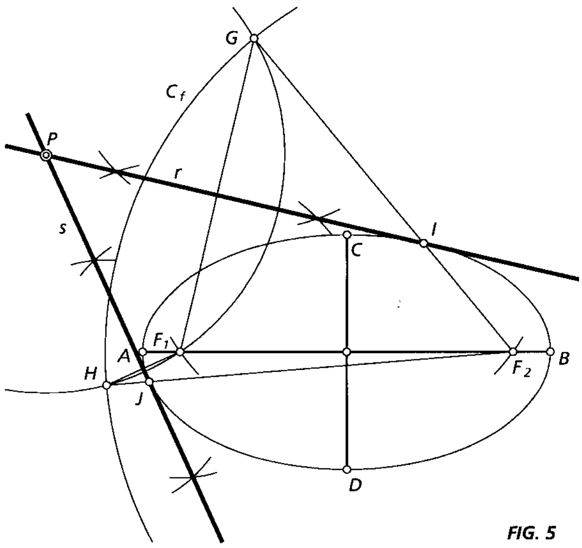
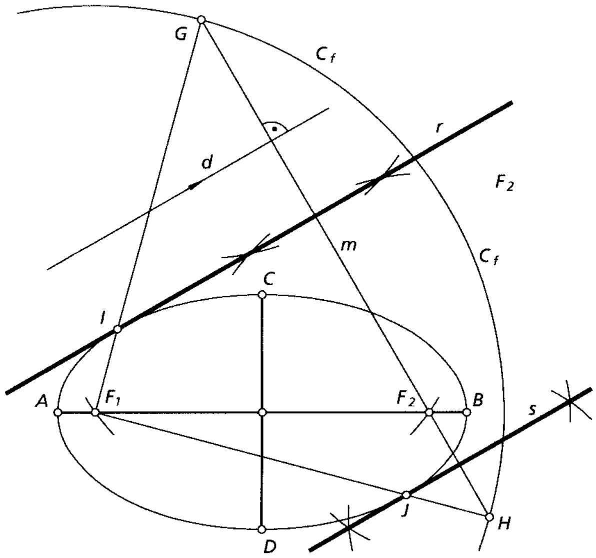


FIG. 5

Rectas tangentes paralelas a una dirección



Dada la elipse cuyos ejes son *AB* y *CD* y una dirección *d*:

1. Se hallan los focos F_1 y F_2 mediante el arco de centro *C* y radio *AB/2.*
2. Se traza la circunferencia focal *Q* correspondiente a uno de los dos focos F_2.
3. Desde el otro foco F_2 se traza la recta *m* perpendicular a la dirección *d*, que corta a la circunferencia focal *C*, en los puntos *G* y *H*.
4. Las mediatrices *r* y *s* de los segmentos GF_2 y HF_2 respectivamente son las tangentes buscadas.
5. Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos *G* y *H* con el foco *F,* y cortar a las tangentes en los puntos *I* y *J*.

6.2. INTERSECCIÓN DE RECTA Y ELIPSE

Método: afinidad

Dadas la elipse de ejes *AB* y *CD* y la recta *r*:

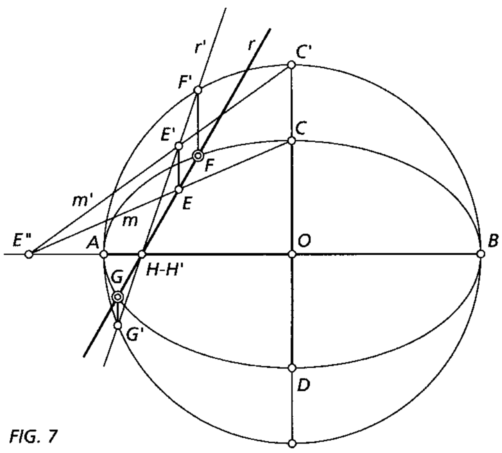
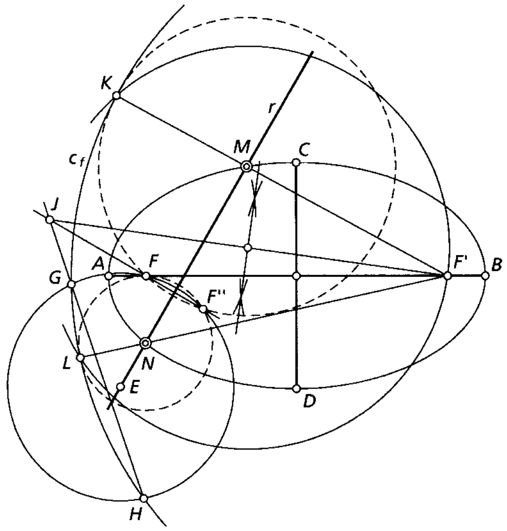


FIG. 7

1. Se traza la circunferencia de diámetro *AB* y se establece una relación de afinidad entre la elipse dada y la circunferencia. El eje de afinidad es *AB* y dos puntos afines son *C* y *C'*, que marcan la dirección de afinidad.
2. Se determina *r'*, afín de la recta *r*: se elige un punto *E* arbitrario de la recta *r* y se une con el punto *C* mediante la recta m hasta cortar al eje en *E'*, la recta *m'* que une *E"* con *C'* es la recta afín de *m*; por el punto *E* se traza la paralela a la dirección de afinidad *CC'* hasta cortar a *m'* en el punto *E'*; la recta *r'* se obtiene uniendo *E'* con el punto *H-H'* de intersección de *r* con el eje.
3. La recta *r'* se corta con la circunferei [illegible] los puntos *F'* y *G'*. Basta con trazar por dichos puntos las paralela [illegible] lirección *CC'* hasta cortar a la recta r en los puntos *F* y *G* para hallar los puntos de intersección con la elipse dada.

Método: circunferencia focal

Dadas la elipse de ejes *AB* y *CD* y la recta *r*:

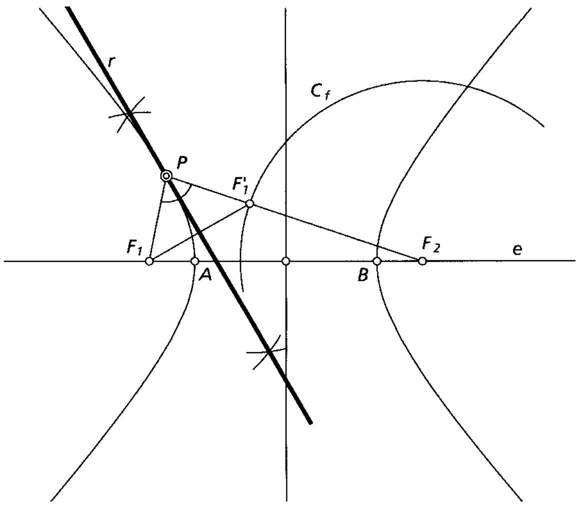


1. Se dibuja, con centro en *F'* y radio *AB*, la circunferencia focal cf y se halla el punto F" simétrico de F respecto de la recta r.
2. Los puntos de intersección son los centros de las circunferencias que pasan por los puntos *F* y *F"* y son tangentes a la circunferencia focal c_f.
3. Se traza una circunferencia cualquiera, con centro en *E*, que pasa por los puntos *F* y *F"*, y se corta con la circunferencia focal en los puntos *G* y *H*.
4. Desde el punto *J* de intersección de las rectas *FF"* y *GH* se hallan los puntos de tangencia *K* y *L* de las rectas tangentes a c_f trazadas desde el punto *J*.
5. Las rectas que unen los puntos *K* y *L* con el foco *F* se cortan con la recta *r* en los puntos *M* y *N*, puntos de intersección de la recta *r* con la elipse.

Nótese que en ambos métodos no hace falta trazar la elipse; ahora bien, en este segundo método sí ha hecho falta hallar los focos *F* y *F'*.

7. HIPÉRBOLA

7.1. RECTAS TANGENTES A UNA HIPÉRBOLA



Recta tangente en un punto de la hipérbola

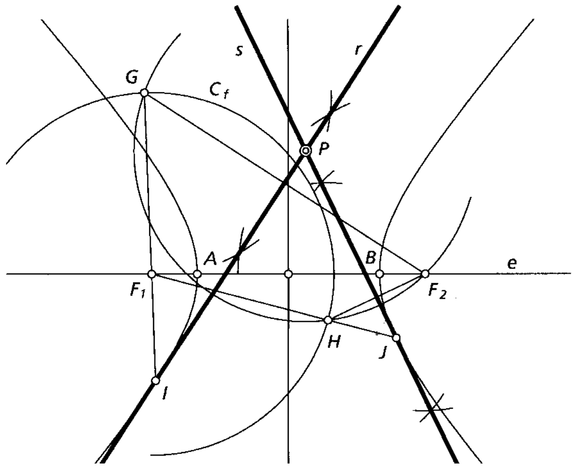
Dada la hipérbola de eje *AB* y distancia focal F_1F_2 y un punto *P* cualquiera de la misma:

1. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos F_2.
2. Se une el foco F_2 con el punto *P* hasta cortar a C_f en el punto F'_1, simétrico del otro foco F_1 respecto de la tangente.
3. La mediatriz *r* del segmento $F_1F'_1$ es la recta tangente buscada.

La recta *r* también puede hallarse trazando la bisectriz del ángulo $F_1PF'_1$.

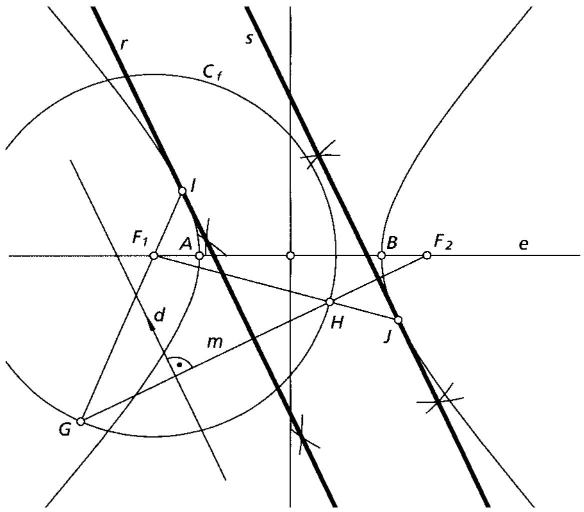
Rectas tangentes desde un punto exterior

Dada la hipérbola de eje *AB* y distancia focal F_1F_2 y un punto *P* exterior:



1. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos F_1.
2. Con centro en *P* se traza el arco de circunferencia que pasa por el otro foco F_2, la cual corta a C_f en los puntos *G* y *H*.
3. Las mediatrices *r* y *s* de los segmentos GF_2 y HF_2 respectivamente son las tangentes buscadas.
4. *Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos G y H con el foco* F_1 y cortar a las tangentes en los puntos *I* y *J*.

Rectas tangentes paralelas a una dirección



Dada la hipérbola de eje *AB* y distancia focal F_1F_2 y una dirección *d*:

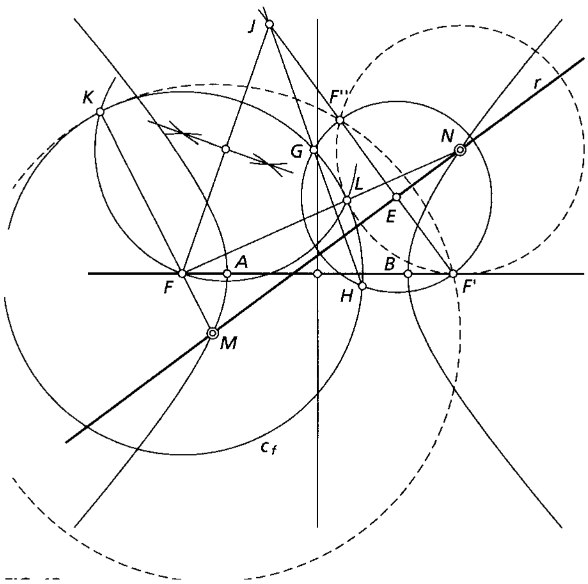
1. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos F_1.
2. Desde el otro foco F_2 se traza la recta m perpendicular a la dirección *d*, que corta a la circunferencia focal C_f en los puntos *G* y *H*.
3. Las mediatrices *r* y *s* de los segmentos GF_2 y HF_2 respectivamente son las tangentes buscadas.
4. Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos *G* y *H* con el foco F_1 y cortar a las tangentes en los puntos *I* y *J.*

7.2. INTERSECCIÓN DE RECTA E HIPÉRBOLA

Dadas la hipérbola de eje *AB* y distancia focal *FF'* y la recta *r*:

1. Se dibuja, con centro en *F* y radio *AB*, la circunferencia focal c_f y se halla el punto *F''* simétrico de *F* respecto de la recta *r.*
   Los puntos de intersección son los centros de las circunferencias que pasan por los puntos *F'* y *F''* y son tangentes a la circunferencia focal c_f .
2. Se traza una circunferencia cualquiera, con centro en *E*, que pasa por los puntos *F'* y *F''*, y se corta con la circunferencia focal en los puntos *G* y *H*.

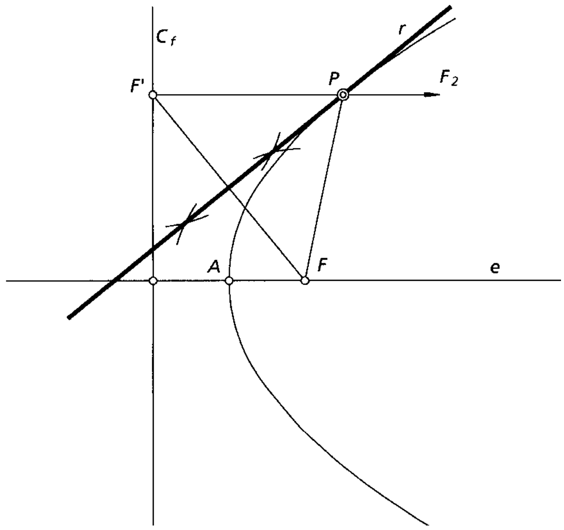
3. Desde el punto *J* de intersección de las rectas *F'F''* y *GH* se hallan los puntos de tangencia *K* y *L* de las rectas tangentes a c_f trazadas desde el punto *J*.
4. Las rectas que unen los puntos *K* y *L* con el foco *F* se cortan con la recta *r* en los puntos *M* y *N*, puntos de intersección de la recta *r* con la elipse.



8. PARÁBOLA

8.1. RECTAS TANGENTES A UNA PARÁBOLA

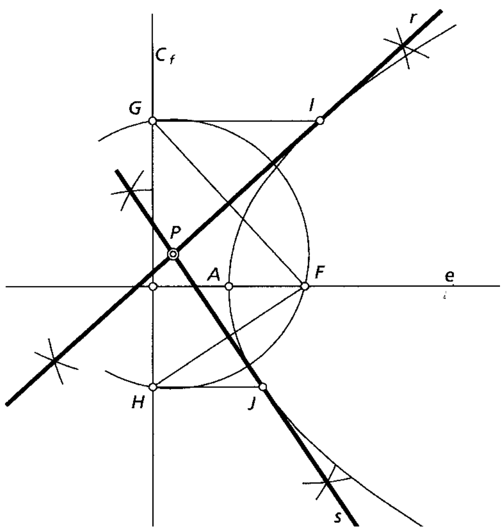
Recta tangente en un punto de la parábola



Dada la parábola de vértice *A* y foco *F* y un punto *P* cualquiera de la misma:

1. Se une el foco F_2 con el punto *P*, es decir, por *P* se traza la paralela al eje *e*, hasta cortar a *C*, en el punto *F*, simétrico de *F* respecto de la tangente (téngase en cuenta que en la parábola la directriz hace las veces de la circunferencia focal cuyo centro está en el infinito).
2. La mediatriz *r* del segmento *FF'* es la recta tangente buscada.

La recta *r* también puede hallarse trazando la bisectriz del ángulo *FPF'*.



Rectas tangentes desde un punto exterior

Dada la parábola de vértice *A* y foco *F* y un punto *P* exterior:

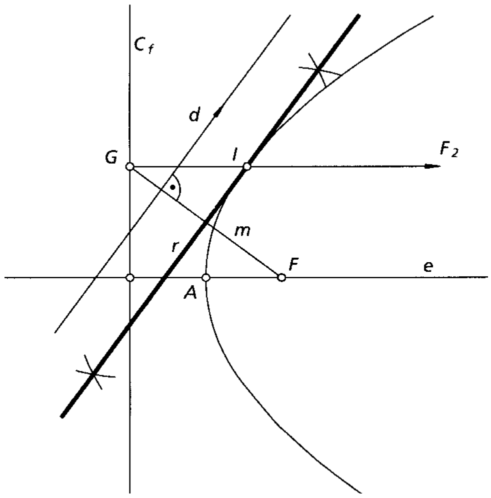
1. Con centro en *P* se traza el arco de circunferencia que pasa por el foco

F y corta a C_f (directriz) en los puntos *G* y *H*.

2. Las mediatrices *r* y *s* de los segmentos *GF* y *HF* respectivamente son las tangentes buscadas.
3. Los puntos de tangencia se hallan al unir los puntos *G* y *H* con el foco F_2, es decir, por *G* y *H* se trazan las paralelas al eje *e*, que cortan a las tangentes en los puntos *I* y *J*.

Rectas tangentes paralelas a una dirección

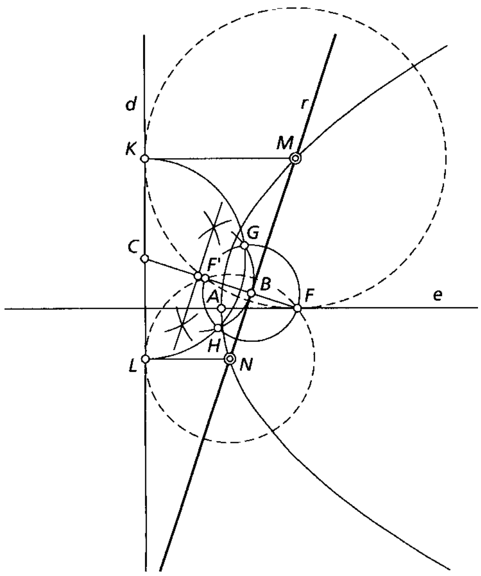
Dada la parábola de vértice *A* y foco *F* y una dirección *d*:



1. Se traza la circunferencia focal C_f correspondiente a uno de los dos focos F_2.
2. Desde el foco *F* se traza la recta *m* perpendicular a la dirección *d*, que corta a la circunferencia focal C_f (directriz) en el punto *G*.
3. La mediatriz *r* del segmento *GF* es la tangente buscada.
4. El punto de tangencia se halla al unir *G* con el foco F_2, es decir, al trazar la paralela al eje e desde el punto *G*, y cortar a la tangente en el punto *I*.

8.2. INTERSECCIÓN DE RECTA Y PARÁBOLA

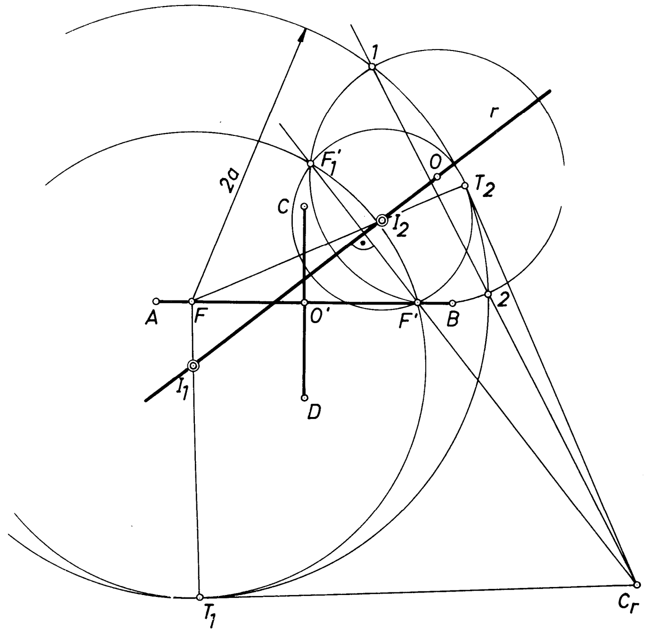
Dadas la parábola de foco *F* y directriz *d* y la recta *r*:



1. Se halla el punto *F'* simétrico de *F* respecto de *r*.
   En la parábola la directriz se confunde con la circunferencia focal cuyo centro está en el infinito, por tanto, los puntos de intersección son los centros de las circunferencias que pasan por los puntos *F* y *F'* y son tangentes a la circunferencia focal, es decir, a *d*.
2. Se traza una circunferencia cualquiera, con centro en *B*, que pase por los puntos *F* y *F*.
3. Los puntos *G* y *H* son los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia de centro *B* trazadas desde el punto *C* de intersección de la recta *FF'* con la directriz *d.* Con centro en *C* y radio *CG* se traza un arco de circunferencia que corta a la directriz en los puntos *K* y *L*.
4. Las rectas perpendiculares a *d* trazadas por los puntos *K* y *L* se cortan con *r* en los puntos *M* y *N*, puntos de intersección de la recta *r* con la elipse.

9 INTERSECIÓN DE UNA RECTA CON UNA CURVA CÓNICA

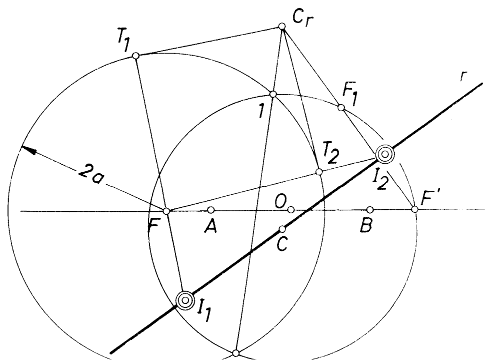
9.1 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LA ELIPSE



Sea la recta r y la elipse dada por sus elementos, focos y vértices. Sabiendo que la elipse es el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que son tangentes a la focal y pasan por el otro foco, el problema se reduce a hallar los centros de estas circunferencias.

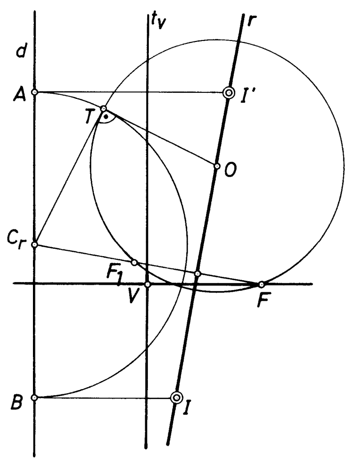
1. Se traza la focal del foco F, de radio 2a,
2. Se halla el simétrico *F;* del foco *F'* respecto a r;
3. Se traza una circunferencia auxiliar cualquiera de centro-O en la recta r, la cual corta a la focal en los puntos *1* y 2; la cuerda *1-2 y* la recta F'_1-F'_2; se cortan en el centro radical C_r; desde C_r se trazan las tangentes a la focal y los puntos de tangencia *T, y* T_2 se unen con *F,* dando los centros I_1 y I_2 en r, que son los puntos donde la recta r corta a la elipse y a la vez centros de circunferencias tangentes a la focal de *F* y que pasan por el otro foco F'.

9.1 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LA HIPÉRBOLA



La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos que son centros de circunferencias tangentes a una circunferencia focal y que pasan por el otro foco que no es centro de la focal. Es decir, los puntos de intersección de la recta r y de la hipérbola son los centros de las circunferencias tangentes a la focal de F y que pasan por los puntos *F' y simétrico de F'* respecto de la recta r. En la figura se resuelve este problema de tangencias ya estudiado.

9.1 INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON LA PARÁBOLA



El procedimiento es el mismo que para las otras cónicas ya estudiadas. Con centro en un punto 0 de la recta r, se traza la circunferencia que pase por *Fy* que pasará también por el simétrico F_1 de Frespecto a r; desde el punto *Cr,* centro radical, se traza la tangente *Cr-T y* este segmento se lleva sobre la directriz, obteniendo los puntos *A y B;* las paralelas al eje por *A y B* dan los puntos de intersección le I' de la recta r con la parábola.

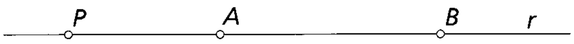
TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

1. SERIES LINEALES

1.1. RAZON SIMPLE DE TRES PUNTOS

Dados dos puntos fijos *A* y *B* en una recta *r* orientada (que tiene sentido positivo y negativo), se llama razón simple de tres puntos *A* y *B* a la relación:

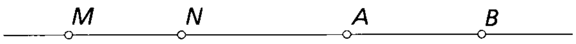
$$h = (PAB) = PA/PB$$



1.2. RAZON DOBLE DE CUATRO PUNTOS

Dados dos puntos fijos *A* y *B* en una recta *r* orientada, se llama razón doble de cuatro puntos *M, N, A* y *B* al cociente de las razones simples de los dos primeros respecto a los otros dos:

$$K = (MNAB)= MAB) / (NAB) = (MA/MB)/ (NA/NB)$$



A cada grupo de cuatro puntos que se puede elegir se denomina *cuaterna armónica.*

1.3. CUATERNA ARMÓNICA

Si la razón doble de cuatro puntos vale *-1*, entonces se dice que los cuatro puntos forman una *cuaterna armónica:*

$$K = (MNAB) = (MAB)/ (NAB) = (MA/MB) = (NA/NB) = -1$$
$$MA /MB = NA / NB$$

Ejercicio

Dados tres puntos *N, A* y *B,* sobre una recta *r*, hallar un punto *M* conjugado armónico del *N* respecto a los puntos *A* y *B.*

1. Por los puntos *A* y *B* se trazan dos rectas *a* y *b* cualesquiera paralelas entre sí.
2. Por el punto *N* se traza una recta *c* cualquiera que corte a las otras

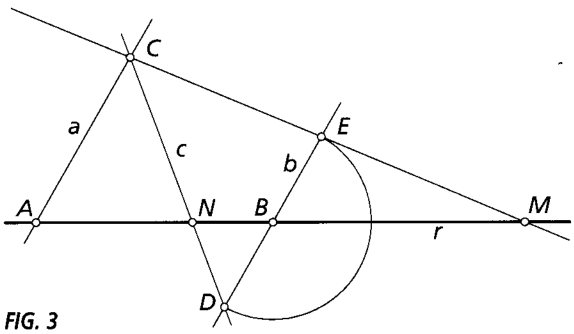


FIG. 3

dos en los puntos *C* y *D*.

3. Con centro en *B* y radio *BO* se traza una semicircunferencia que cortará a la recta *b* en el punto *E.*

4. El punto *M* de intersección de la rec une los puntos *C* y *E con* la recta *r es* la solución.

1.4. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Transformaciones geométricas. Una transformación geométrica es una correspondencia (o aplicación) entre elementos de dos formas geométricas.

El concepto de *transformación* en geometría es equivalente al concepto de *función* en álgebra.

Transformaciones proyectivas. Es una transformación tal que cuatro puntos en línea recta se transforman en cuatro puntos en línea recta, siendo la razón doble de los cuatro primeros igual a la razón doble de los cuatro segundos.

Existen también transformaciones entre haces de rectas, haces de planos, etc.

En geometría se dice que dos formas son proyectivas si una puede obtenerse de la otra mediante proyecciones y secciones.

Homografía. Se denomina así a la correspondencia entre dos formas geométricas tal que a un elemento de una forma le corresponde un elemento de la misma especie de la otra forma (a un punto le corresponde un punto, a una recta le corresponde una recta, etc.), según una determinada ley.

Correlación. Es la correspondencia entre elementos de distinta especie (a un punto le corresponde una recta, a una recta le corresponde un plano, etc.).

Son *transformaciones homográficas*: la homología, la afinidad, la homotecia, la traslación, la simetría y el giro.

La homología y la afinidad la estudiaremos en un tema aparte.

2. HOMOTECIA

2.1 HOMOTECIA

La homotecia es una homología de eje impropio, es decir, está en el infinito. En consecuencia, la homotecia es una transformación que cumple las siguientes leyes:

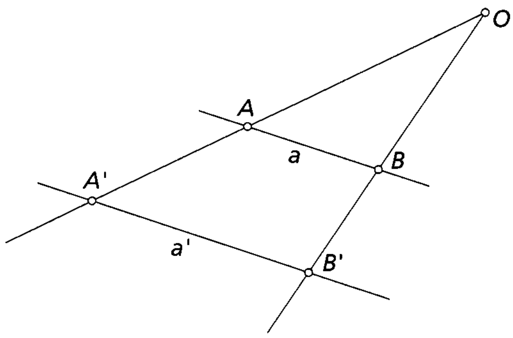
- Dos puntos homotéticos están alineados con un punto fijo llamado *centro de homotecia.*
- Dos rectas homotéticas son paralelas.

Razón de la homotecia

Razón de homotecia (o coeficiente de homotecia) es la razón entre las distancias que hay desde el centro O hasta los puntos homotéticos *A* y *A'* .

K = (O∞coAA') = (OA/OA´)/(∞A∞A´) = OA/OA´

Si el coeficiente es positivo, ambos puntos están al mismo lado del centro de homotecia, y si es negativo, están a distinto lado.



Ejercicio

Hallar el homotético *B'* de un punto *B*, conociendo el centro de homotecia *O* y un par de puntos homotéticos *A* y *A':*

3 Por *A'* se traza una recta *a'* paralela a la recta *a* que une los puntos *A* y *B*.
4 Donde la recta *a'* se corta con el rayo *0B* está el punto 8' solución.

Determinación de una homotecia

Una homotecia queda determinada al conocer los siguientes datos:

a) El centro y dos puntos homotéticos.
b) El centro y la razón de la homotecia.
c) Dos figuras homotéticas.

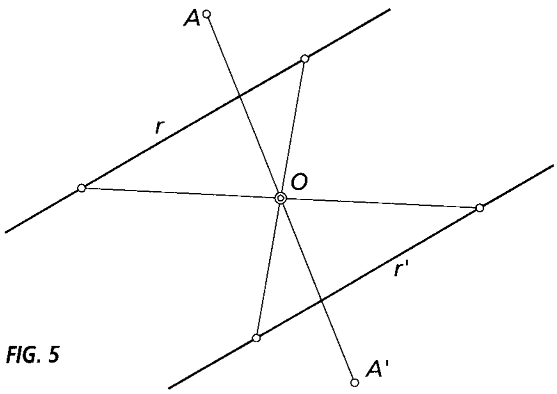


FIG. 5

3. SIMETRÍA CENTRAL

La simetría central es una homología de eje impropio (homotecia) cuya razón de homotecia vale *K= -1*. Esta definición indica que la simetría central es una transformación que cumple la siguiente ley:

- Dos puntos simétricos están aline ın un punto fijo llamado *centro de simetría* y están a distinto lado *e* igual a de él.

Ejercicio

Construir la figura simétrica del polígono *ABCDE* respecto del punto *O*:

1. Se une el punto *A* con el centro *O*, llevando sobre dicha recta y en

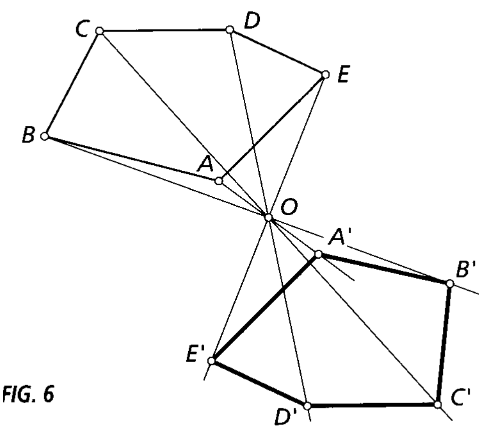


FIG. 6

sentido contrario el segmento *OA'= OA.*

2. Se une el punto *B* con el centro *O* y, como con el punto anterior, se llevará la distancia *OB'= OB,* y así sucesivamente.

4. SIMETRÍA AXIAL

La simetría axial es una homología de centro impropio (afinidad) cuya dirección es perpendicular al eje y cuya razón vale K = -1. Esto indica que la simetría axial es una transformación que cumple la siguiente ley:

- La recta que une dos puntos simétricos es perpendicular a un eje, llamado *eje de simetría,* estando ambos puntos a distinto lado e igual distancia del mismo.

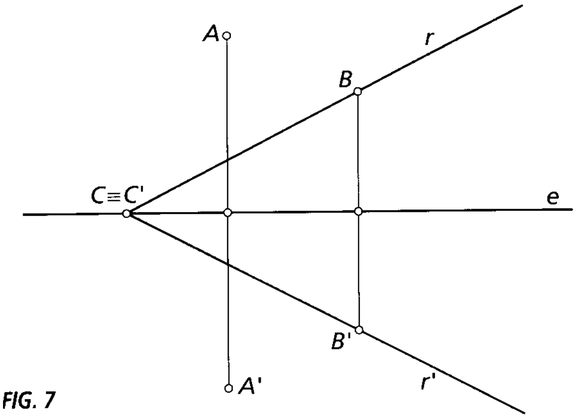


FIG. 7

Ejercicio

Construir la figura simétrica del polígono *ABCDE* respecto del eje *e.*

1. Por el punto *A* se traza la recta perpendicular al eje *e,* llevando sobre dicha recta y en sentido contrario el segmento A_OA'= A_OA.
2. Se traza por el punto *B* la recta perpendicular al eje *e* y, como con el punto anterior, se lleva la distancia $B_OB´=B_OB$, y así sucesivamente.

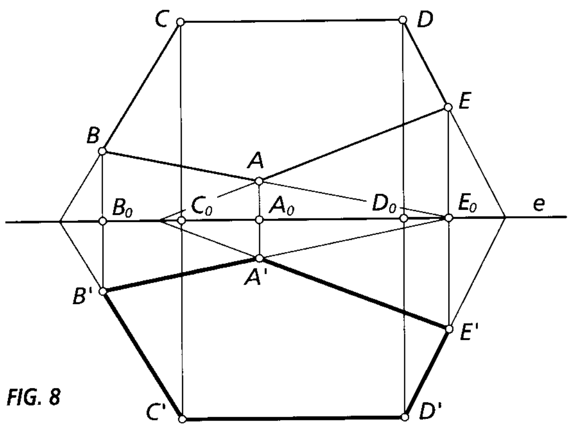
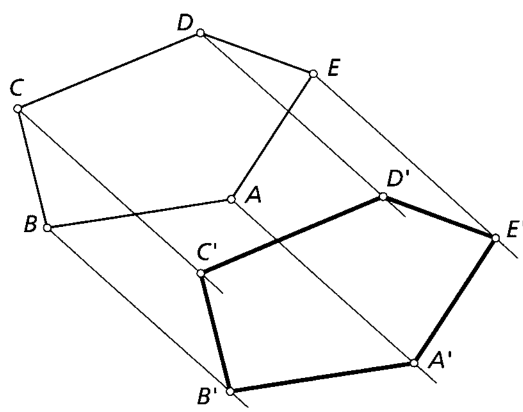


FIG. 8

5. TRASLACIÓN

La traslación es una homología de centro impropio (afinidad) y de eje impropio (las rectas homólogas son paralelas); por tanto, es una transformación que cumple:

- La recta que une dos puntos homólogos es paralela a una *dirección de traslación.*
- Dos rectas homólogas son



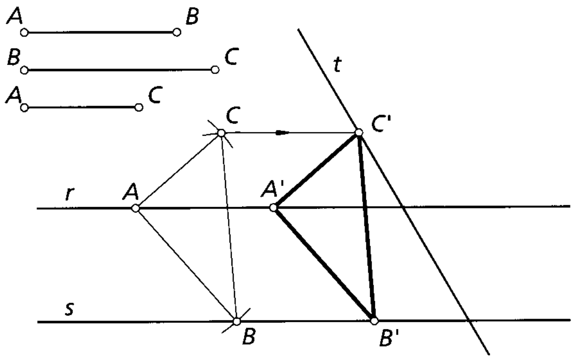
paralelas.

Lo anterior equivale a decir que todos los puntos de una figura se trasladan la misma distancia según una misma dirección.

Ejercicio

Dadas dos rectas paralelas y una tercera no paralela a ellas, construir un triángulo de manera que tenga un vértice en cada recta, respectivamente.

Sean las rectas *r, s* y *t*, y los segmentos *AB, BC* y *AC*:



1 Con centro en un punto *A* cualquiera de la recta *r* y radio *AB* se traza un arco hasta cortar a la recta s en el punto *B*.
2 Con centro en *A* y radio *AC* y con centro en *B* y radio *BC* se dibujan dos arcos que se cortan en el punto *C*.
3 Se traslada el triángulo *ABC*: por el punto *A* se traza una recta paralela a las recta *r* y *s* hasta cortar a ten el punto *C'*.
4 Por *C´* se dibujan las paralelas a *AC* y a *BC* hasta cortar a *r* y *s* en los puntos *A'* y *B'*, respectivamente.

6. GIRO

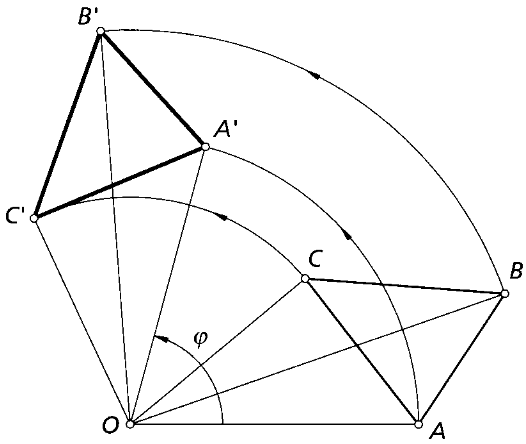


FIG. 11

Dados un punto *O*, un ángulo *φ* y un sentido, el giro es una transformación homográfica tal que a un elemento *A* le corresponde un elemento *A',* de modo que se cumple:

- La distancia de ambos puntos a un punto fijo, llamado *centro de giro,* es constante *(OA = OA').*
- El ángulo que se forma al unir los dos puntos con el centro de giro, y su sentido, es igual a un ángulo dado, llamado *ángulo de giro* (ángulo *AOA' = φ).*

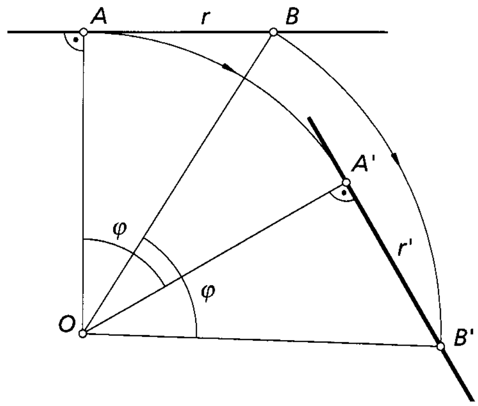
El centro de giro 0 es el punto de intersecció... mediatrices de los segmentos que unen puntos homólogos, AA', B...

Ejercicio

Girar la recta r conociendo el centro de giro 0 y el ángulo *φ* de giro (fig. 12):

1. Por el punto *O* se traza la perpendicular a *r*.

2. Con centro en *O* y ángulo *φ* se gira el punto *A* hasta la posición *A'*.
3. Por *A'* se traza la recta girada *r'* perpendicular a *OA'*. Para girar cualquier otro punto *B* de la recta r basta con trazar un arco de centro *O* y radio *OB* hasta cortar a la recta girada *r'* en el punto *B'*. Por supuesto, el ángulo *φ* = *AOA'* es igual al ángulo *BOB'.*



7. INVERSIÓN

La inversión es una transformación que cumple las siguientes leyes:

- Dos puntos inversos están alineados con otro fijo llamado *centro de inversión.*
- El producto de distancias del centro de inversión a dos puntos inversos es constante.

Potencia de inversión

Sea un punto *O*, una circunferencia de centro *C* y una recta *r* que pasa por el punto *O* y corta a la circunferencia en dos puntos *A* y *A'* ; tal como se vio en el tema anterior, se llama potencia *P* de un punto *O* respecto de la circunferencia de centro *C* al producto:

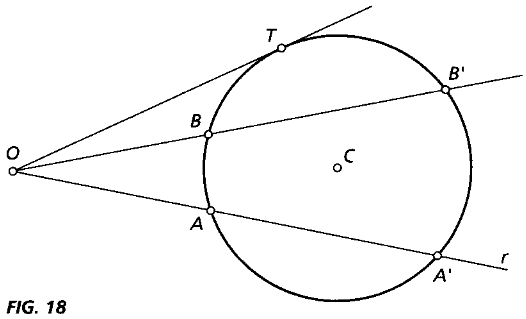


FIG. 18

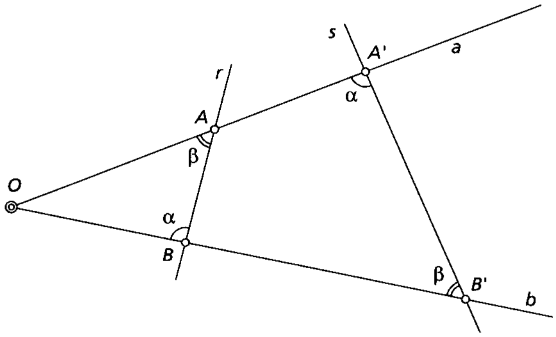
$$p = OA \times OA'$$

Todos los pares de puntos que se obtienen al trazar desde un punto *O* rectas secantes a una circunferencia son inversos respecto al punto *O* (centro de inversión).

Si la potencia es positiva, los pares de puntos inversos se encuentran a un mismo lado del centro de inversión, es decir, el centro *O* es exterior a la circunferencia; en cambio, si la potencia es negativa, los pares de puntos se encontrarán a distinto lado y el centro es interior a la circunferencia .

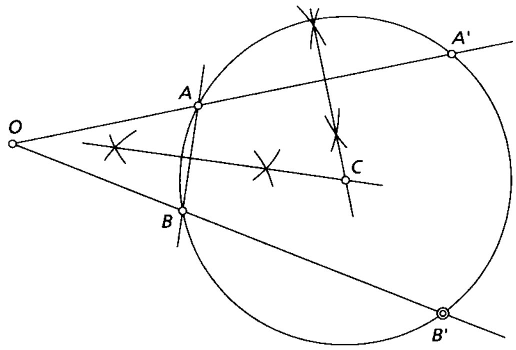
Propiedades de una inversión

1. Dos pares de puntos inversos *A, A', B* y *B'* determinan una circunferencia 23).
2. Dos rectas inversas, que unen entre sí dos puntos *AB* y sus



inversos *A' B',* son antiparalelas de las rectas que unen los pares de puntos inversos *AA'* y *BB'* (cuatro rectas son antiparalelas cuando en el cuadrilátero que forman al cortarse, cada ángulo interior es igual al ángulo exterior del vértice opuesto, es decir, cada ángulo es suplementario del opuesto).

Ejercicio

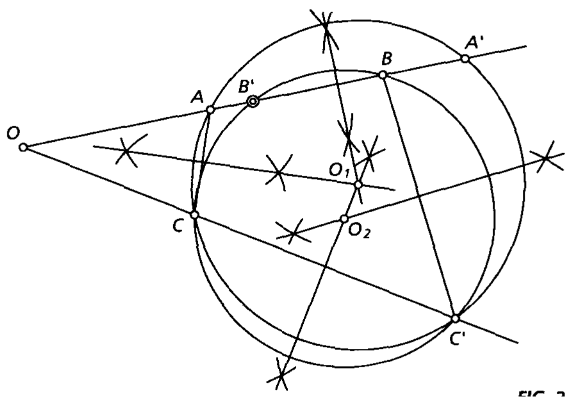


Hallar el inverso *B'* de un punto *B*, conociendo el centro de inversión *O* y un par de puntos inversos *A* y *A'* no alineados con *B':*

1. Se dibuja la circunferencia que pase por los puntos *A, A'* y *B;* para ello, se trazan las mediatrices de los segmentos *AA'* y *AB* que, al cortarse, determinan el centro *C* de la circunferencia.
2. El punto *B'* donde se cortan la circunferencia y la recta *OB* será el inverso del punto *B.*

También podría haberse hallado trazando la recta *A' B'* antiparalela de la recta *AB* respecto de las rectas *OA* y *0B.*

Ejercicio



Hallar el inverso *B'* de un punto *B*, conociendo el centro de inversión *O* y un par de puntos inversos *A* y *A'* alineados con *B:*

1. Se elige un punto *C* cualquiera, no alineado con *A* y *A',* y se halla el inverso *C'* trazando la circunferencia que pasa por *A, A'* y *C*.
2. Se halla el inverso *B'* trazando la circunferencia que pasa por *a,* C y *C'.*

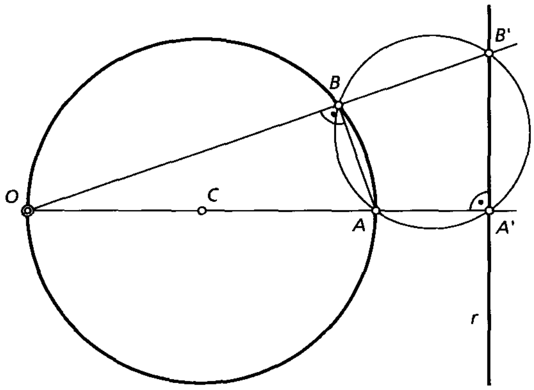
7.1 FIGURAS INVERSAS

Una inversión queda determinada conociendo los siguientes datos:

a) El centro y un par de puntos inversos.
b) El centro y la potencia.
c) Dos figuras inversas.

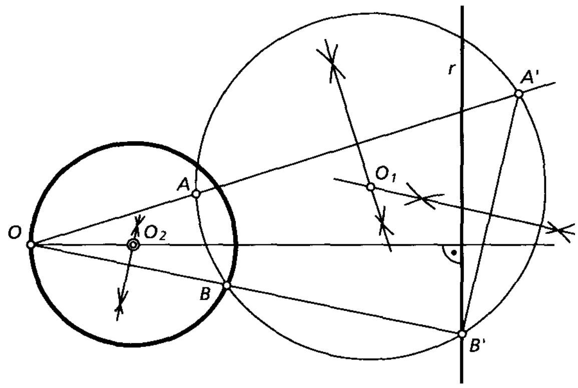
Circunferencia que pasa por el centro de inversión

La figura inversa de una recta *r;* que no pasa por el centro de inversión O_1 es una circunferencia que pasa por dicho centro, y recíprocamente, la figura inversa de una circunferencia, de centro C_1 que pasa por el centro de inversión O_1 es una recta *r* perpendicular al diámetro que pasa por *O* y *C*.



Ejercicio

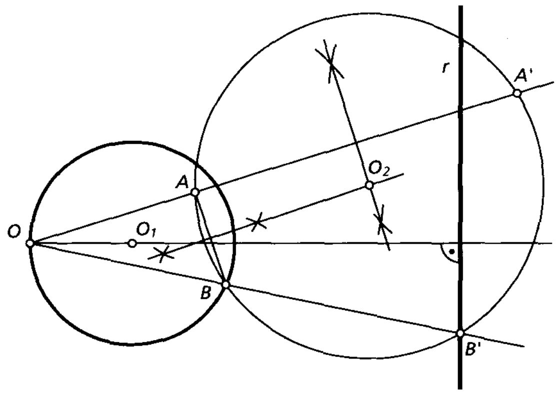
Dado el centro de inversión *O* y un par de puntos inversos *A* y *A'* , hallar la figura inversa de una recta *r* que no pasa por el centro de inversión *O*:



1. Se elige un punto *B'* cualquiera de la recta *r* y se halla su inverso *B* mediante la circunferencia de centro o¡ que pasa por los puntos *A, A'* y *B'.*
2. Por el centro de inversión *O* se traza la perpendicular a la recta *r;* como además la circunferencia buscada debe pasar por *O*, basta con trazar la mediatriz del segmento *OB* hasta cortar a la perpendicular anterior en O_2, centro de la circunferencia buscada.

Ejercicio

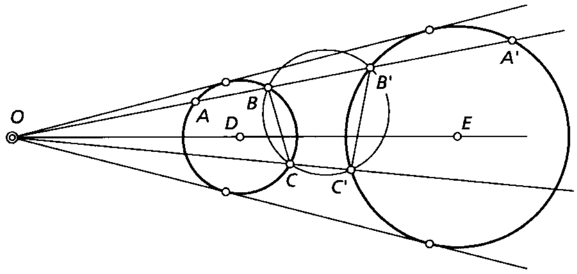
Dado el centro de inversión *O* y un par de puntos inversos *A* y *A',* hallar la figura inversa de una circunferencia de centro o¡ que pasa por el centro de inversión *O*:



1. Se elige un punto *B* cualquiera de la circunferencia y se halla su inverso *B'* mediante la circunferencia de centro O_2 que pasa por los puntos *A, A'* y *B´* .
2. Por el centro de inversión *O* se traza la recta que une *O* y O_1, trazando a continuación por *B'* (inverso de *B)* la recta *r* perpendicular a la recta OO_1.

Circunferencia que no pasa por el centro de inversión

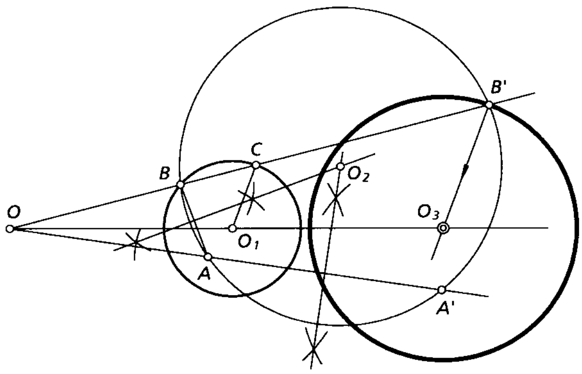
La figura inversa de una circunferencia, de centro *D,* que no pasa por el centro de inversión es otra circunferencia, de centro *E*, homotética de la anterior, cuyo centro de homotecia es el centro *O* de inversión y cuya razón de homotecia es igual al cociente entre la potencia de inversión y la potencia de *O* respecto de la circunferencia de centro *D.*



Dicho de otra forma, si *B′* es el inverso de *B* y *A′* es el inverso de *A* respecto del centro de inversión *O*, sucede que *B′* es homotético de *A* y *A′* es homotético de *B* respecto del centro de homotecia *O*.

Ejercicio

Dado el centro de inversión *O* y un par de puntos inversos *A* y *A′,* hallar la inversa de una circunferencia de centro O_1 que no pasa por el centro:



1. Se elige un punto *B* arbitrario de la circunferencia de centro O_1 y se halla el inverso *B´* mediante la circunferencia de centro O_2 que pasa por los puntos *A, A′* y *B*. La recta que une *O*, *B* y *B*' corta a la circunferencia de centro O_1 en *C*.

2. Como las dos circunferencias son homotéticas, por el punto *B*', homotético del punto *C*, se traza la recta paralela a CO_1 hasta cortar a la recta OO_1 en el punto O_3, centro de la circunferencia inversa buscada; el radio es $O_3B´$.

ESCALAS

1. GENERALIDADES

Las escalas pueden considerarse como la aplicación práctica de la semejanza. Según esto, escala es la relación que existe entre dos figuras, una de ellas es la del dibujo y la otra, la figura real. Esta relación, igual que en una semejanza, se representa por un cociente donde el numerador representa la medida del dibujo y el denominador, la medida en la realidad.

Por ejemplo, supongamos que la dimensión de un objeto mide 1.475 mm y sobre el papel la vamos a representar como 55 mm; esto significa que hemos aplicado una escala *E = 55/1.475* o, simplificando, *E = 1/25.*

$$\text{ESCALA} = \frac{\text{DIBUJO}}{\text{REALIDAD}}$$

Clases de escalas

- De reducción: reducen el objeto real al dibujarlo (el numerador es menor que el denominador).
- De ampliación: aumentan el objeto real (el numerador es mayor que el denominador).
- De tamaño natural: el dibujo y el objeto tienen las mismas medidas (se representa por *E = 1/1).*

Escalas más usuales

1:1, 1:2, 1:5 y todas aquellas que se deducen de las anteriores añadiendo ceros *(1:10, 1:20, 1:50, 1:100, 1:200, 1:500, 1:1.000, 1:2.000*, etc.). En escalas de ampliación: *2:1, 5:1 y 10:1*.

De todo lo dicho anteriormente se deduce una primera forma de dibujar a escala que consistiría en:

1. Se toma la medida del objeto real que se pretende dibujar.
2. Dicha medida se multiplica por el numerador y se divide por el denominador.
3. El resultado de la operación anterior se lleva al papel en el que se hace el dibujo.

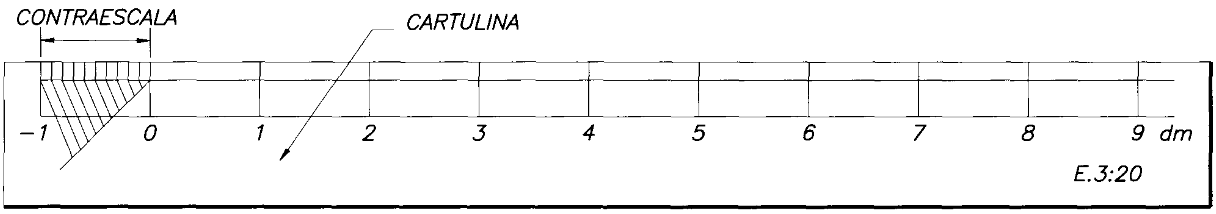
Evidentemente, éste no es un buen procedimiento para el empleo de escalas, puesto que, además de ser un método en el que hay que realizar numerosas operaciones, resulta poco ortodoxo; en dibujo deben realizarse todas las operaciones de forma gráfica; otras materias se encargan de resolver los problemas por otros procedimientos.

2. ESCALA GRÁFICA

La escala gráfica o escala volante consiste en la construcción de una regla reducida o ampliada, según sea el caso, que nos permita dibujar con ella, de tal forma que las magnitudes del objeto real sean tomadas con la regla natural pero dibujadas sobre el papel con la regla volante que nos hayamos "fabricado".

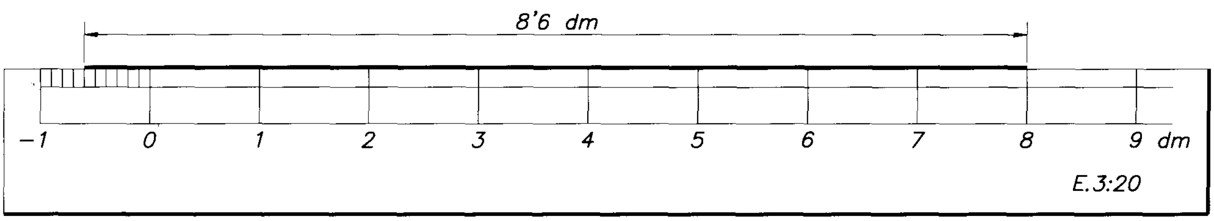
Proceso para la construcción de una escala gráfica:

1. Se elige la unidad que vayamos a reducir. Por ejemplo, si se quiere construir la escala *E. 3:20* no se elegirá el centímetro como unidad a reducir, puesto que al multiplicar por *3* y dividir por *20* nos da como resultado *0,15 cm = 1,5 mm*, que es una unidad muy pequeña para trabajar con ella; tampoco convendría elegir el metro como unidad a reducir, pues al efectuar la operación anterior da como resultado *0,15 m = 15 cm* que, por el contrario, es una magnitud muy grande. Sin embargo, al tomar como unidad el decímetro el resultado de la operación es *0,15 dm = 1,5 cm*, tamaño apropiado para nuestro propósito.
2. Sobre una cartulina se trazan dos rectas paralelas al borde de la misma y a continuación se llevan, a partir del extremo de la izquierda, tantas



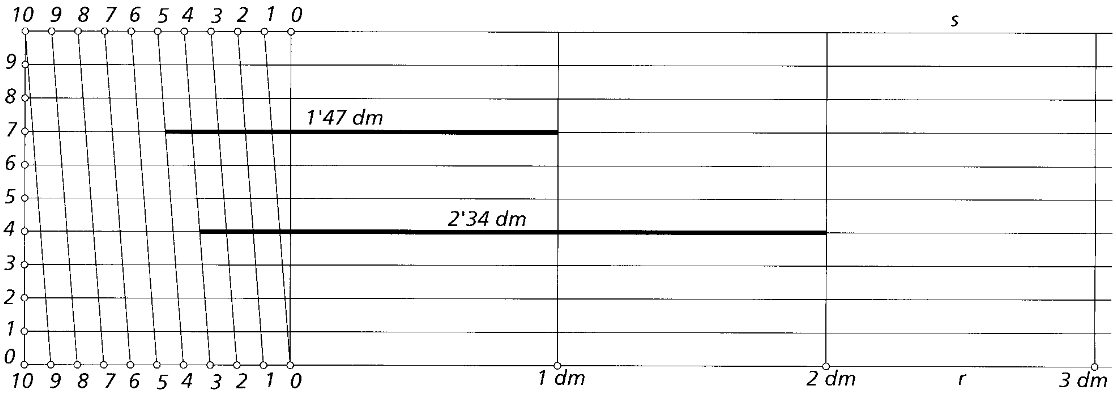
unidades reducidas *(1,5 cm)* como quepan, numerándolas a partir del *-1 (-1, 0, 1, 2, 3, ...).*
3. La primera de las divisiones obtenidas la dividimos a su vez en diez partes iguales por el procedimiento de división de un segmento en partes iguales. La graduación así obtenida se denomina *contraescala gráfica*.

La forma de utilizar una escala volante, teniendo en cuenta que dicha escala sólo sirve para medir en un dibujo lo que previamente se haya medido en la realidad con una regla natural, consiste en hacer coincidir la medida con una división entera de la escala gráfica, observando los decimales en la contraescala gráfica, tal como se indica en el ejemplo, al tomar una medida de *8,6 dm* sobre el dibujo.



3. ESCALA TRANSVERSAL

Con esta escala puede apreciarse, no sólo las décimas de unidad que se apre-



cian en la contrae cala gráfica estudiada anteriormente, sino incluso las centésimas de unidad.
Supongamos que se desea construir la escala *E. 2:5*:

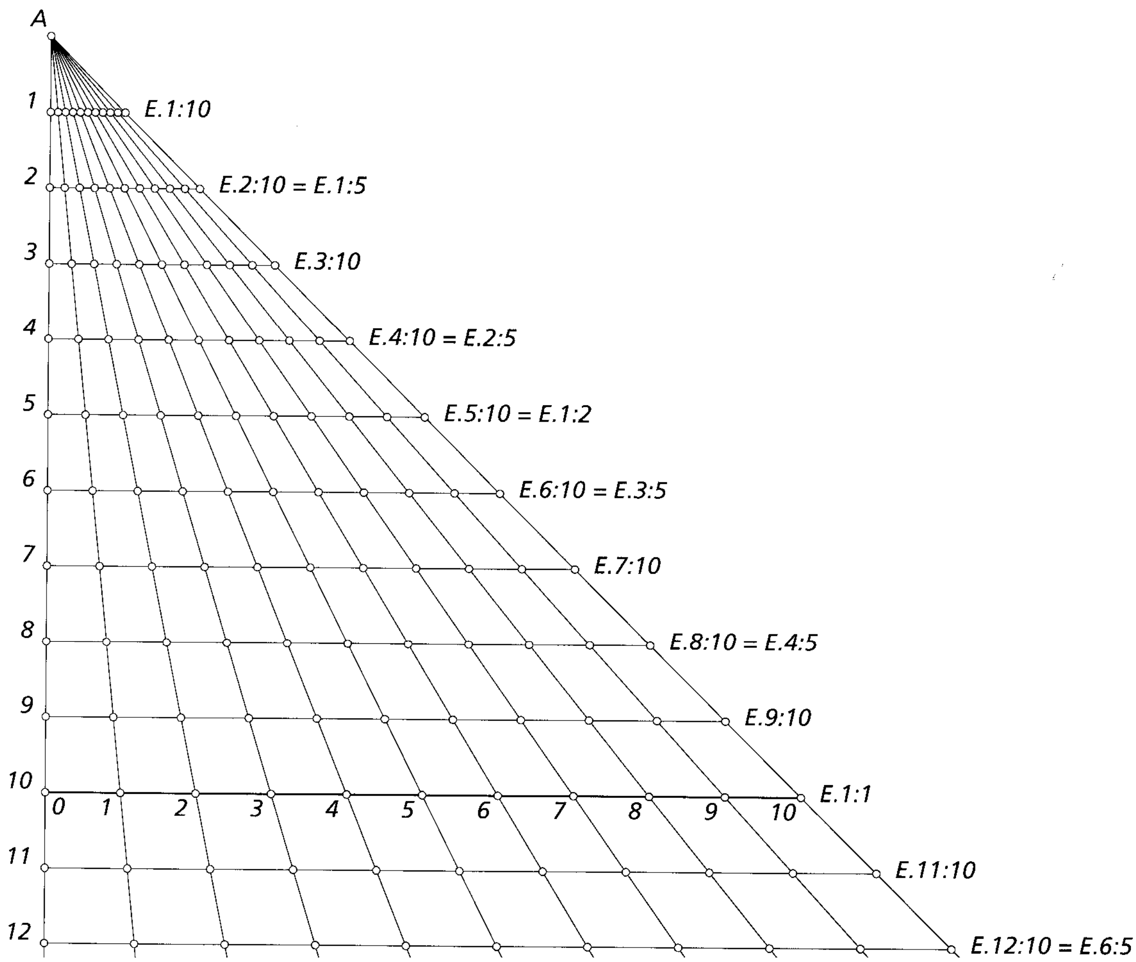
1. Se elige la unidad que vayamos a reducir, tal como se ha visto en el punto 1 del proceso para la construcción de una escala gráfica. Por tanto, *1 dm x 2/5 = 0,4 dm = 4 cm*, es la unidad reducida.
2. Sobre una recta *r* cualquiera se lleva la unidad reducida tantas veces como sea posible, numerando las divisiones tal como se indica en la figura: 10, 0, 1, 2, 3, ...
3. La primera de estas divisiones, entre los puntos *10 y 0*, se divide a su vez en diez partes iguales por el procedimiento de división de un segmento en partes iguales. Esta subdivisión se denomina contraescala.
4. Se trazan *10* rectas paralelas a la recta *r* con distancias iguales entre sí, y por los puntos *10, 0, 1, 2, 3,* ... se trazan rectas perpendiculares a la recta *r* que corten a las otras diez rectas.
5. En la recta *s*, última de las diez rectas paralelas, se construye la correspondiente contraescala.
6. Se unen los puntos de división de las *contraescalas* de las rectas r y s de la siguiente, manera: el punto *O* de *r* con el punto *1* de *s*, el punto *1* de *r* con el punto *2* de *s*, el punto *2* de *r* con el punto *3* de s, etc.

La forma de utilizar la escala transversal consiste en hacer coincidir uno de los extremos de la medida con una división entera de alguna de las rectas paralelas, observando que el otro extremo de la magnitud coincida de forma exacta con alguna de las divisiones de la contraescala. La división entera indica las unidades, la división de la contraescala las décimas y el número de la recta paralela indica las centésimas de unidad.

4. TRIÁNGULO UNIVERSAL DE ESCALAS

Se trata ahora de construir un triángulo, denominado triángulo universal de escalas, de forma que en una misma construcción podamos obtener las escalas más frecuentemente utilizadas.

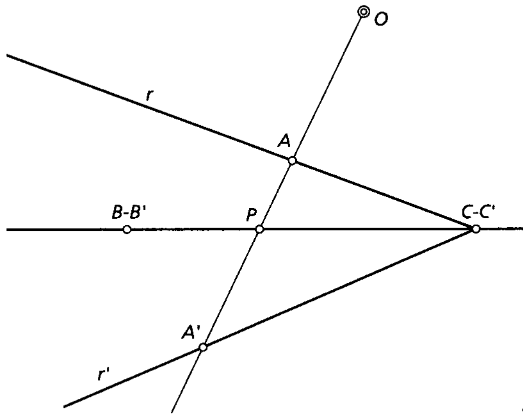
1. Se construye un triángulo cualquiera con la única condición de que un lado mida *10 cm*. No obstante, por facilidad de construcción, se aconseja que dicho triángulo sea equilátero o bien rectángulo isósceles cuyos catetos midan *10 cm*.
2. El lado que mida *10 cm* se divide en diez partes iguales. Cada uno de los puntos de división, numerados del *1* al *10*, se une con el vértice opuesto *A* del triángulo.
3. Uno cualquiera de los otros dos lados se divide también en diez partes iguales, numerando los puntos de división del *1* al *10*, comenzando por el vértice *A*. Por cada uno se trazan rectas paralelas al lado que mide *10 cm*, quedando todas ellas divididas en diez partes iguales al cortarse con las rectas que concurren en el punto *A*, y obteniendo así diversas escalas de reducción, tales como *1:10, 1:5, 3:10, 2:5, 1:2, etc.*
4. Si se prolongan las rectas que concurren en el punto A y se siguen trazando rectas paralelas a la recta que contiene la escala natural, por de-



bajo de ella y a la misma distancia que las anteriores, se obtienen las escalas de ampliación *11:10, 6:5, 13:10, etc*.

HOMOLOGÍA Y AFINIDAD

1. HOMOLOGÍA



Homología plana es una transformación homográfica que cumple las siguientes leyes:

- Dos puntos homólogos están alineados con un punto fijo llamado centro de homología.
- Dos rectas homólogas se cortan siempre en una recta fija llamada eje de homología.

El eje, por tanto, es el lugar geométrico de los puntos que son homólogos de sí mismos (puntos dobles).

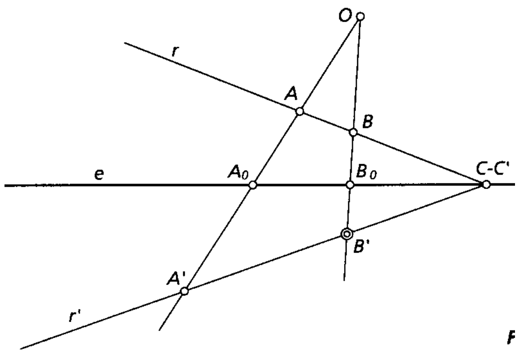
1.1. COEFICIENTE DE HOMOLOGÍA

Es la razón doble que forman dos puntos homólogos *A* y *A'*, el centro *O* y el punto *P* de intersección de la recta AA' con el eje e.

k = (OPAA') = (OAA') / (PAA') = (OA l 0A)' PA I PA'

Si *K = -1* a la homología se le denomina involución.

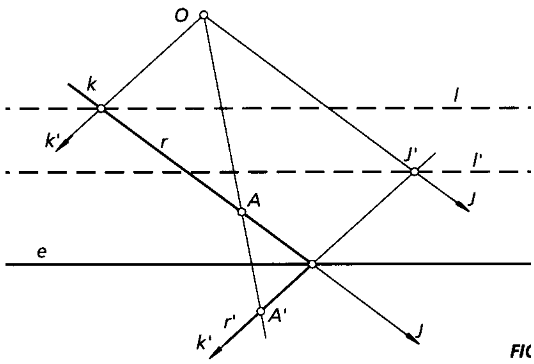
Ejercicio



Hallar el homólogo *B'* de *B*, conociendo el centro 0, el eje e y un par de puntos homólogos *A* y *A'*.

1. Se unen los puntos *A* y *B* mediante la recta r que corta al eje en el punto *C-C'.*
2. El punto *C-C'* se une con el punto *A'* mediante la recta *r'*, homóloga de la recta *r*.
3. Se une el centro *O* con el punto *B* hasta cortar a la recta *r'* en el punto *B'* solución.

1.2. RECTAS LÍMITE



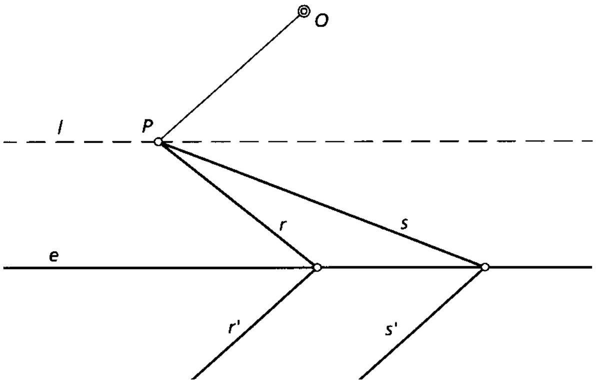
Es el lugar geométrico de los puntos cuyos homólogos están en el infinito. Son dos: *l* y *l´*; paralelas al eje.

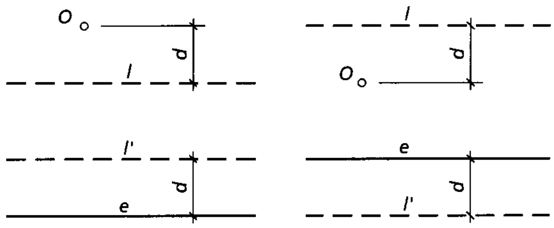
Ejercicio

Dadas dos rectas homólogas *r* y *r'*, el centro *O* y el eje *e*, hallar las rectas límite:

1. Por el centro de homología *O* se traza la paralela a la recta *r'* hasta cortar a la otra recta *r* en el punto *K*.
2. Por *K* se traza la recta límite *l* paralela al eje.
3. Por el centro de homología *O* se traza la paralela a la recta *r* hasta cortar a la otra recta *r'* en el punto *J'*.
4. Por *J'* se traza la recta límite *l'* paralela al eje.

Propiedades





- Todas las rectas que se cortan en un mismo punto *P* de la recta límite tienen sus homólogas paralelas a *OP*.
- La distancia de una de las rectas límite al centro de homología es la misma que hay desde la otra recta límite al eje de homología.
- Las rectas límite están siempre entre el centro *O* y el eje e, o bien fuera de ellos.

1.3. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS HOMÓLOGAS

Una homología queda determinada conociendo los siguientes datos:

a) El eje, el centro y un par de puntos homólogos.
b) El centro y dos pares de rectas homólogas.
c) Un punto doble y dos pares de puntos homólogos.
d) El centro, el eje y una recta límite.
e) El centro, una recta límite y dos puntos homólogos.
f) El centro, el eje y el coeficiente de homología.
g) El centro y las dos rectas límite. h) Dos figuras homólogas.

Ejercicio

Hallar el homólogo *A'* de un punto *A*, conociendo el centro de homología *O*, el eje e y la recta límite *l*.

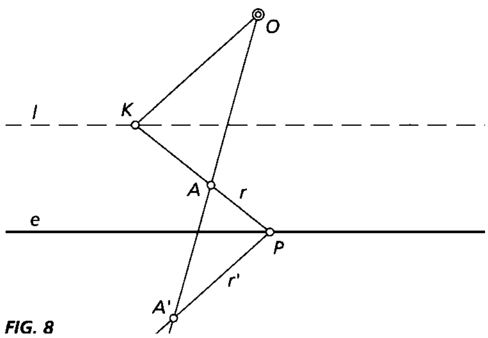


FIG. 8

1. Se traza una recta r cualquiera que pase por *A*; dicha recta corta al eje en *P* y a la recta límite en *K*.
2. Se une el centro *O* con *K* y por el punto *P* se traza la paralela *r'* (homóloga de *r*) a *OK*.

3. Donde la recta *OA* corta a *r'* se obtiene el punto *A'*.

Ejercicio

Construir la figura homóloga del polígono *ABCDE* dado el centro *O*, el eje *e* y un punto *A'*.

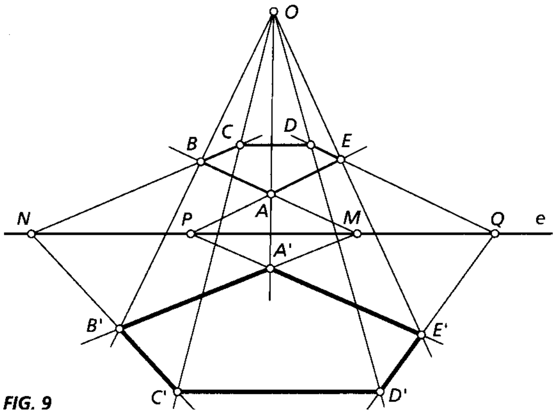


FIG. 9

1. Aplicando el procedimiento general, se une el punto *A* con cualquier otro, el *B* por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto *M*.
2. El punto *M* se une con *A'* mediante una recta que corta al rayo *OB* en el punto *B'*.
3. Se une el punto *C* con el punto *B*, o con cualquier otro del que ya se conozca su homólogo, y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los homólogos de todos los vértices.

Ejercicio

Hallar el homólogo *B'* de un punto *B*, conociendo el centro *O*, el eje e y un par de puntos homólogos *A* y *M* alineados con *B.*

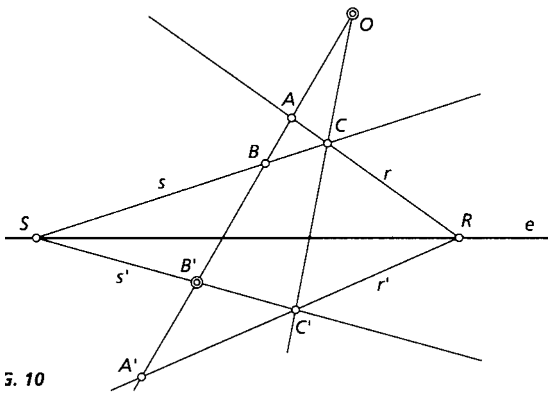


FIG. 10

1. Se elige un punto *C*, arbitrario, y se une con *A* mediante la recta *r* que corta al eje en *R*.
2. Se une *R* con *A*' mediante la recta r' (homóloga de *r*).
3. Se traza la recta que une el centro *O* con el punto *C* hasta cortar a *r'* en *C'.*
4. Se une *C* con *B* hasta cortar al eje en *S*.
5. Se traza la recta *s'* (homóloga de s) uniendo *S* y *C'*.
6. Donde la recta *s'* corta a la recta *OB* se obtiene el punto *B'* buscado.

1.4. CÓNICAS HOMOLÓGICAS DE UNA CIRCUNFERENCIA

La figura homológica de una circunferencia es una cónica que depende de la posición relativa de la circunferencia y su recta límite:

- La recta límite es *exterior*: la figura es una elipse.

- La recta límite es *tangente*: la figura es una parábola.

- La recta límite es *secante*: la figura es una hipérbola.

Propiedades

- La tangente común a una cónica y a su homóloga pasa por el vértice de homología.

- Si dos cónicas homológicas se cortan, la recta que une los puntos de intersección es el eje de homología y si son tangentes, la tangente común es el eje.
- El centro de una cónica se transforma en el polo de la recta límite respecto de la figura homológica.

1.5. ELIPSE HOMOLÓGICA DE LA CIRCUNFERENCIA

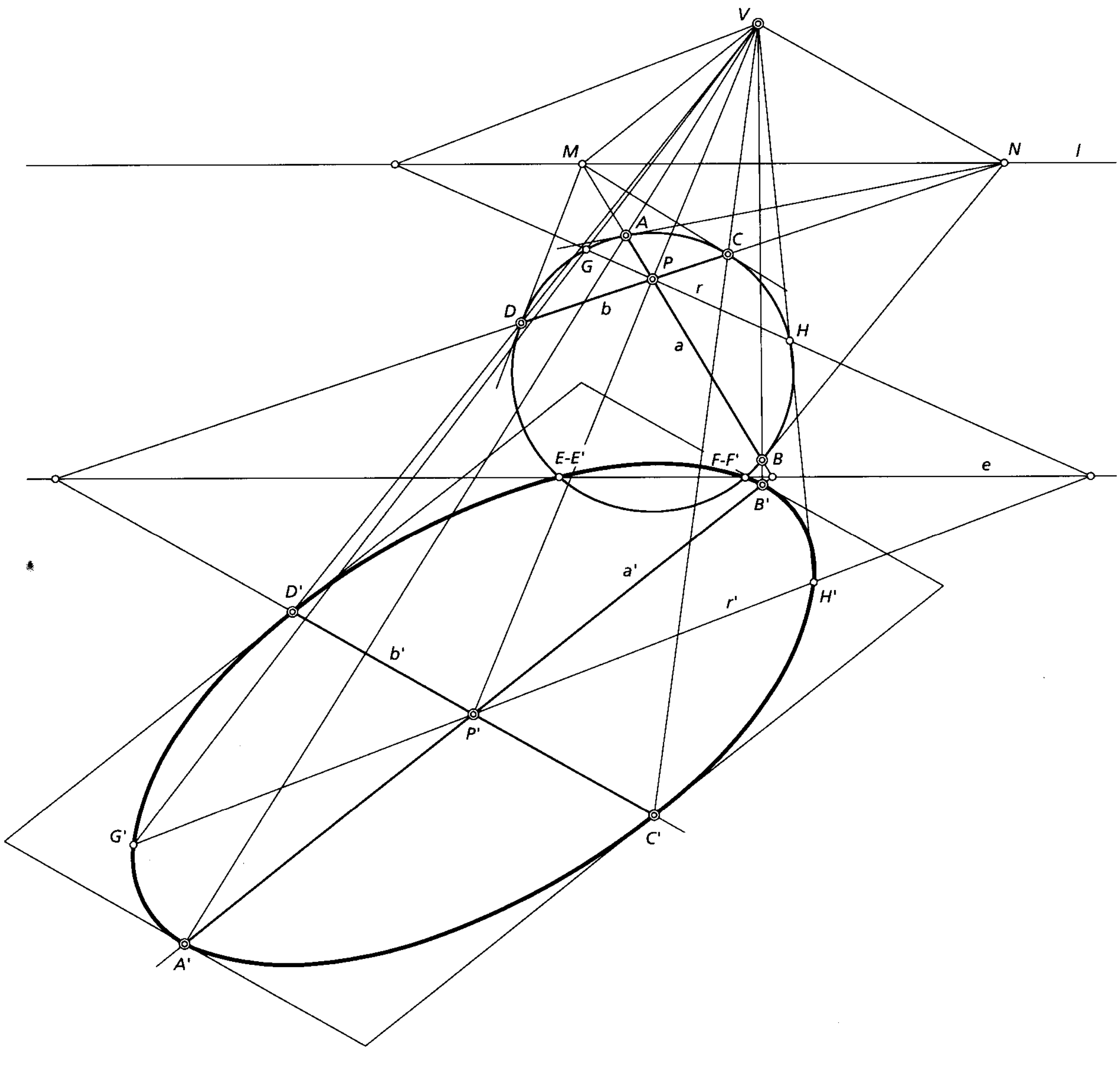
Sea la circunferencia de centro *O*, un eje e, la recta límite *l* y el vértice *V*:

Determinación del polo

1. Se elige un punto arbitrario *M* de la recta límite *l* y se trazan las tangentes a la circunferencia, cuyos puntos de tangencia son *C* y *D*.
2. Se unen los puntos *C* y *D* hasta cortar a la recta límite en *N* y desde este punto se trazan dos tangentes cuyos puntos de tangencia son *A* y *B*.
3. Se unen los puntos *A* y *B*. La intersección *P* de la *E* rectas *AB* y *CD* es el polo *P*.

Diámetros conjugados de la elipse

4. Son los segmentos homólogos de *AB* y *CD*: por el punto de intersección de la recta *AB* con el eje, se traza la paralela a *VM* y por el punto de in-



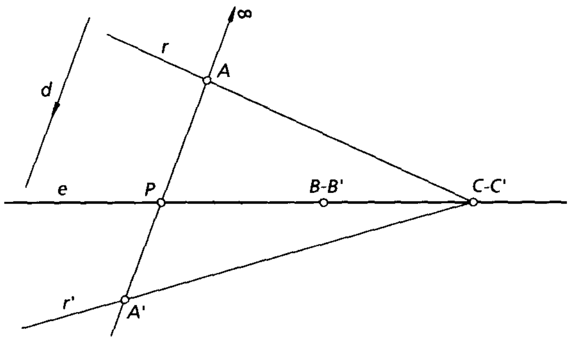
tersección de *CD* con el eje se traza la paralela a *VN*. El homólogo *P'* del polo *P* es el centro de la elipse homóloga.

Trazado de la elipse

5. Por el polo *P* se traza una recta *r* cualquiera que corta a la circunferencia en los puntos *G* y *H*. Hallando la homóloga *r'* y los homólogos *G'* y *H',* se determinan puntos de la elipse.
6. Los puntos *E-E'* y *F-F'* de intersección de ambas cónicas con el eje son puntos dobles.

2. AFINIDAD

La afinidad es una homología de centro impropio, es decir, que está en el infinito. Por tanto, la afinidad es una transformación homográfica que cumple las siguientes leyes:



- La recta que une dos puntos afines es paralela a una dirección d de afinidad.
- Dos rectas afines se cortan en un punto del eje de afinidad.

En afinidad no existen rectas límite.

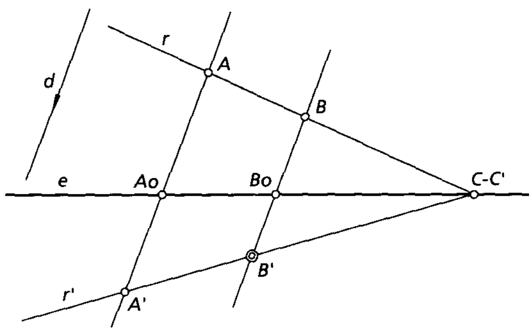
2.1.COEFICIENTE DE AFINIDAD

$$K = (\infty PAA') / PAIPA' = PA' / PA'$$

Si el coeficiente de afinidad es positivo, los dos puntos *A* y *A'* están al mismo lado del eje, y si es negativo están a distinto lado.

Ejercicio

Hallar el afín *B'* de un punto *B*, conociendo la dirección de afinidad *d*, el eje *e* y un par de puntos afines *A* y *A':*

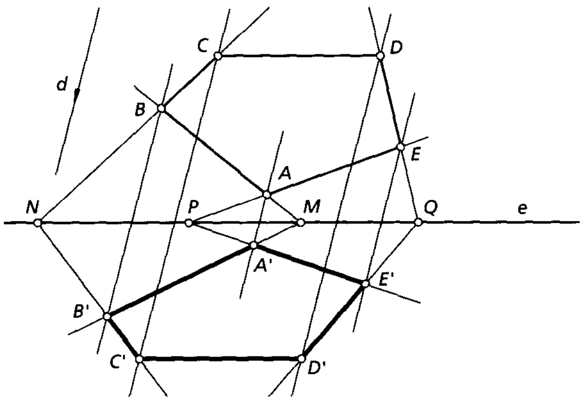


1. Se unen los puntos *A* y *B* mediante la recta *r* que corta al eje en el punto *GC'.*
2. El punto *C-C'* se une con el punto *A'* mediante la recta *r'*, afín de la recta *r.*
3. Por el punto *B* se traza una recta paralela a la dirección *d* de afinidad hasta cortar a la recta *r'* en el punto *B'* solución.

2.2. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS AFINES

Una afinidad queda determinada conociendo los siguientes datos:

a) El eje y dos puntos afines.
b) La dirección de afinidad y el coeficiente.
c) Dos figuras afines.

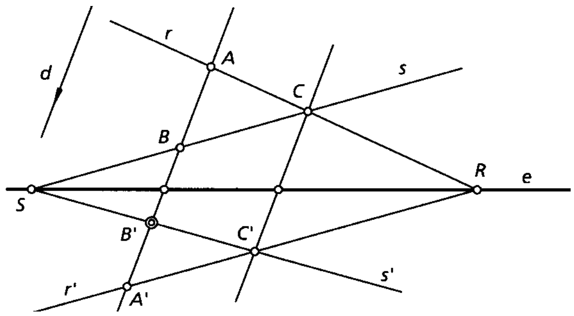


Ejercicio

Construir la figura afín del polígono *ABCDE* conociendo la dirección *d* de afinidad, el eje *e* y un punto afín *A'.*

a) Aplicando el procedimiento general, se une el punto A con cualquier otro, el B por ejemplo, hasta cortar al eje en el punto M.
b) El punto M se une con A' mediante una recta que corta al rayo paralelo a la dirección de afinidad trazado por B, en el punto B'.
c) Se une el punto C con el punto B, o con cualquier otro del que ya se conozca su afín, y se siguen las mismas operaciones anteriores hasta determinar los afines de todos los vértices.

Ejercicio



Hallar el afín *B'* de un punto *B*, conociendo la dirección de afinidad *d*, el eje *e* y un par de puntos afines *A* y *M* alineados con *B*.

a) Se elige un punto *C*, arbitrario, y se une con *A* mediante la recta *r* que corta al eje en *R.*
b) Se une *R* con *A'* mediante la recta *r'* (afín de *r*).
c) Por el punto *C* se traza la paralela a la dirección de afinidad hasta cortar a *r'* en *C'.*
d) Se une *C* con *B* hasta cortar al eje en *S*.
e) Se traza la recta *s'* (afín de *s*) uniendo *S* y *C*'.
f) El corte de *s'* y *AA'* es el punto *B'* buscado.

2.3. ELIPSE AFÍN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Caso general

Dada la circunferencia de centro *O*, el eje e y el punto *O'* afín de *O*:

Ejes de la elipse

1. Se traza la mediatriz del segmento *OO*' hasta cortar al eje en el punto *E* y con centro en *E*

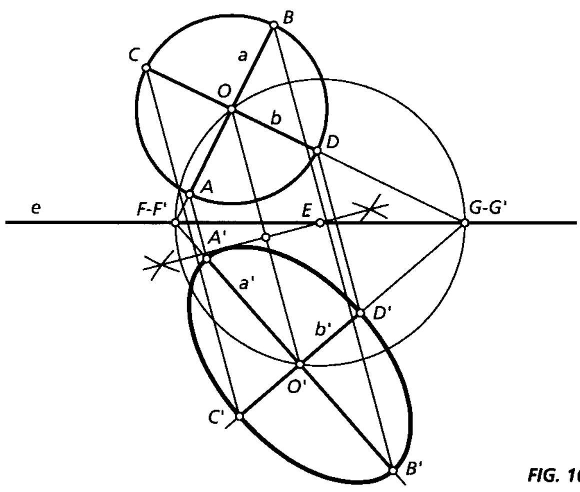


FIG. 16

y radio *EO = EO'* se trazada circunferencia que corta al eje en los puntos *F-F y G-G'.*

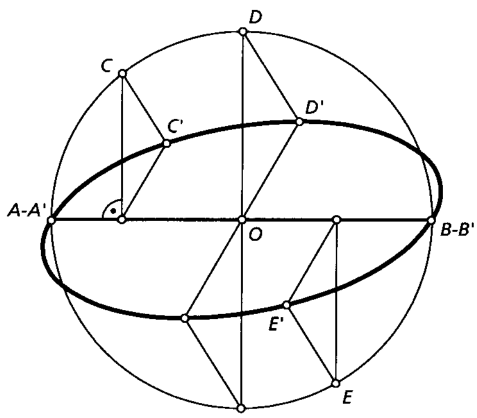
2. Las rectas *a* y *b* que unen estos puntos con *O* tienen sus homólogas en las rectas *a'* y *b'* que unen *F-1"* y *G-G'* con *O´*.
3. Por los puntos *A, B, C* y *D* de intersección de las rectas *a* y *b* con la circunferencia se trazan paralelas a la dirección de afinidad *OO´*, obteni do así los ejes *AB'* y *C'D'.*

Trazado de la elipse

4. Por el centro *O* se traza una recta cualquiera que corta a la circunferencia en dos puntos. Hallando los homólogos de estos se determinan puntos de la elipse.
5. Si la circunferencia se cortara con el eje, los dos puntos de intersección serían puntos dobles.

Circunferencia y elipse de diámetro común

Dada la circunferencia de diámetro *AB-A'B'* y un par de puntos afines *C-C'* :



1. *Eje de afinidad*. Es el diámetro común *AB-A'B'* de ambas cónicas.
2. *Dirección de afinidad*. Es la recta *C-C'.*
3. *Trazado de la elipse*. Por el punto *C* se traza la perpendicular al eje hasta cortarlo en el punto *M*. Por cualquier otro punto *N* del eje se traza la perpendicular hasta cortar a la circunferencia en el punto *E*. Por *N* se dibuja la paralela a *MC'* y por *E* la paralela a *CC'*; ambas paralelas se cortan en el punto *E'* de la elipse y así sucesivamente.